ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVIII
TOME DE DEUIL
ANNÉE 1945

RÉDACTEUR: FRANCISZEK LEJA, CRACOVIE, RUE ŁOBZOWSKA 61.
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: STANISŁAW GOŁĄB, CRACOVIE, RUE ŁOBZOWSKA 61

KRAKÓW 1945
INSTYTUT MATEMATYCZNY U. J., UL. ŚW. JANA 22.

Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an.

La Société offre gratuitement 50 tirages à part aux auteurs des Annales.

Les manuscrits doivent être envoyés à l'adresse:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

l'Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.

Table des matières

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVIII
TOME DE DEUIL
ANNÉE 1945

RÉDACTEUR: FRANCISZEK LEJA, CRACOVIE, RUE ŁOBZOWSKA 61.
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: STANISŁAW GOŁĄB, CRACOVIE, RUE ŁOBZOWSKA 61

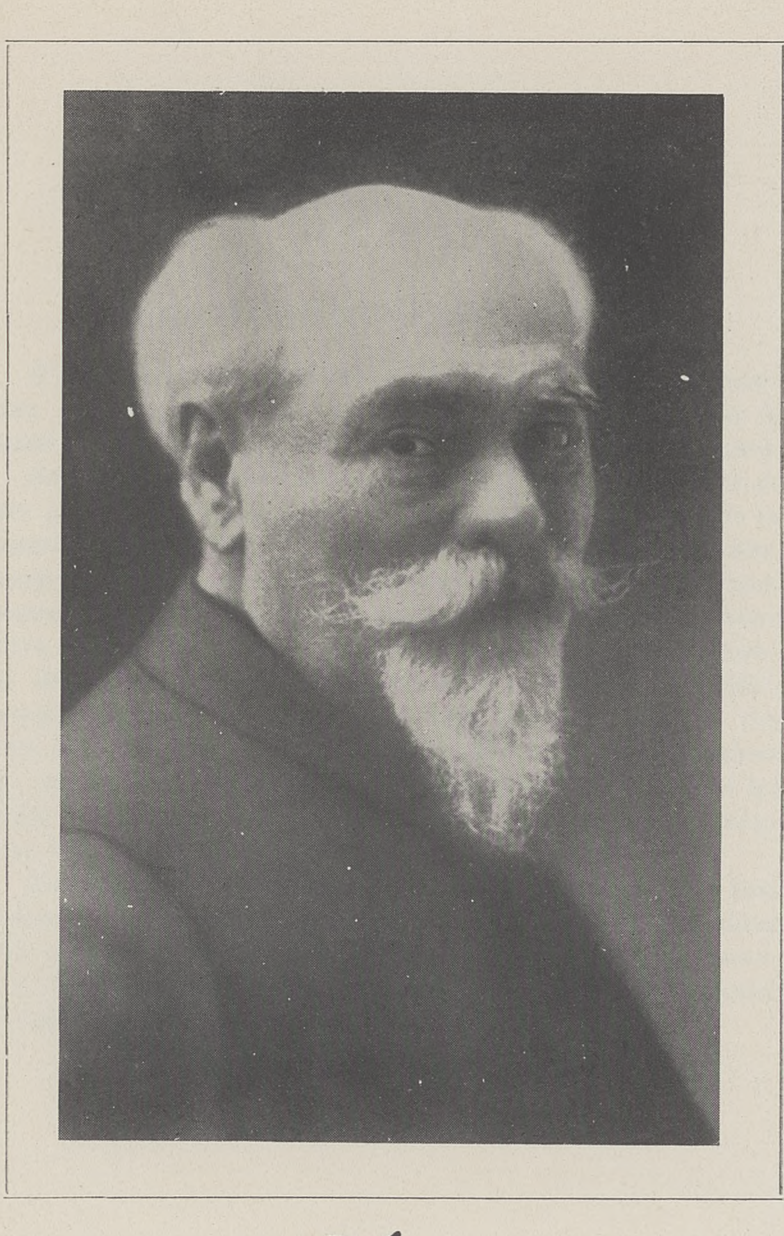


KRAKÓW 1945
INSTYTUT MATEMATYCZNY U. J., UL. ŚW. JANA 22.



PRINTED IN POLAND

Reprodukcja fotooffsetowa 1958, Drukarnia im. Rewolucji Październikowej



S. Zaremba


BIBL. JAG.

A LA MÉMOIRE DE NOS MORTS.

C'est avec la plus profonde douleur que nous communiquons à nos Lecteurs des graves et irréparables pertes, subies par la Société Polonaise de Mathématique durant les années de guerre.

Selon les renseignements encore incomplets, 42 Membres de notre Société, qui en comptait 204, sont décédés. La mort de la plupart d'eux eut lieu dans des conditions presque incroyables. Martyrisés aux camps de concentrations ou assassinés d'une façon perverse et cruelle, ils furent victimes des agresseurs de notre Patrie. Ils ont dû souffrir ces cruautés bien qu'ils fussent hommes de Science qui ne travaillaient dans le domaine de Mathématique que pour le bien de leur Pays et de l'Humanité. Ces pertes sont d'autant plus douloureuses qu'à côté de nos Membres plus agés, bien mérités pour la Science, il y avait parmi les décédés des jeunes gens qui auraient pû continuer encore longtemps leur travail scientifique.

Nous nous bornons, pour le moment, à publier une liste provisoire de nos Morts, suivie des brèves données sur leur décés et du portrait de M. Stanislas Zaremba, Rédacteur de ces Annales et Président de la Section de Cracovie de la Société Polonaise de Mathématique.

La Rédaction

Auerbach Herman, Chargé du cours à l'Université de Lwów, tué par la Gestapo à Lwów en été de 1943.

Banach Stefan, Professeur à l'Université de Lwów, décédé à Lwów en septembre de 1945.

Bartel Kazimierz, Professeur et ancien Recteur de l'Ecole Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941 avec plus de 30 autres professeurs des Ecoles Supérieures de Lwów.

Chwistek Leon, Professeur à l'Université de Lwów, décédé à Moscou en août de 1944.

Dickstein Samuel, Professeur et Docteur honoris causa de l'Université de Varsovie, doyen d'age des mathématiciens polonais, mort à Varsovie en septembre de 1939.

Dniestrzański Roman, Professeur au Lycée à Chrzanów, péri en automne de 1939.

Eidelheit Maks, Docteur de mathématique, tué par la Gestapo en été de 1943.

Grabowski Lucjan, Professeur à l'Université de Lwów, décédé en 1941.

Hoborski Antoni, Professeur et ancien Recteur de l'Académie des Mines, Professeur à l'Université de Cracovie, mort en février de 1940 au camp de concentration de Sachsenhausen où il fut transporté en novembre de 1939 avec les autres professeurs des Ecoles Supérieures de Cracovie dont 19 sont également morts dans ce camp.

Jacob Marian, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri entre les mains de la Gestapo à Varsovie en automne de 1944.

Janik Wincenty, Professeur au Lycée à Cracovie, décédé en 1943.

Jantzen Kazimierz, Professeur à l'Université de Wilno, décédé à Wilno.

Kaczmarz Stefan, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri en automne de 1939.

Kempisty Stefan, Professeur à l'Université de Wilno, mort en prison en août de 1940.

Kerner Michał, Docteur de mathématique, tué dans les chambres à gaz de Treblinka en janvier de 1943.

Koźniewski Andrzej, Docteur de mathématique, mort à Zbaraż en décembre de 1939.

Kwietniewski Stefan, Chargé du cours à l'Université de Varsovie, mort en été 1941.

Lebesgue Henri, Professeur du Collège de France à Paris, Docteur honoris causa de l'Université de Lwów.

Leśniewski Stanisław, Professeur à l'Université de Varsovie, décédé à Varsovie le 13 mai 1939.

Levi-Civita Tullio, Professeur à l'Université de Rome.

Lindenbaum Adolf, Chargé du cours à l'Université de Varsovie, tué à Białystok en été de 1941.

Lindenbaum Janina, Docteur de mathématique, tuée à Białystok en été de 1941.

Lubelski Salomon, Docteur de mathématique, tué à Białystok en été de 1941.

Łomnicki Antoni, Professeur et Prorecteur de l'Ecole Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Mathison Miron, Chargé du cours à l'Université de Varsovie décédé en Angleterre en 1940.

Mazurkiewicz Stefan, Professeur et Prorecteur de l'Université de Varsovie, décédé en juin de 1945.

Patkowski Józef, Professeur à l'Univertité de Wilno, mort à Varsovie pendant une attaque aérienne en 1942.

Pepis Józef, Docteur de mathématique, tué par la Gestapo à Lwów en août de 1941.

Przeborski Antoni, Professeur à l'Université de Varsovie, décédé à Varsovie en 1941.

Rajchmann Aleksander, Professeur à l'Université libre de Varsovie, péri au camp de concentration de Dachau en 1940.

Ruziewicz Stanisław, Recteur de l'Académie de Commerce de Lwów, ancien professeur à l'Université de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Saks Stanisław, Chargé du cours à l'Université de Varsovie, tué par la Gestapo à Varsovie en novembre de 1943.

Schauder Juliusz, Chargé du cours à l'Université de Lwów, péri entre les mains de la Gestapo à Lwów en septembre de 1943.

Schreier Józef, Docteur de mathématique, tué par la Gestapo à Drohobycz en avril de 1943.

Sternbach Ludwik, Docteur de mathématique, tué par la Gestapo à Lwów en été de 1943.

Stożek Włodzimierz, Professeur et Doyen de l'Ecole Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Vetulani Kazimierz, Professeur de l'Ecole Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Weigel Kasper, Professeur de l'Ecole Polytechnique de Lwów, fusillé par la Gestapo à Lwów en juillet de 1941.

Wilk Antoni, Docteur en philosophie, mort le lendemain de son retour du camp de concentration de Sachsenhausen à Cracovie en février de 1940.

Wilkosz Witold, Professeur à l'Université de Cracovie, mort à Cracovie en mars de 1941.

Zalcwasser Zygmunt, Professeur à l'Université libre de Varsovie, tué dans les chambres à gaz de Treblinka en janvier de 1943.

Zaremba Stanisław, Professeur d'honneur de l'Université de Cracovie, fondateur et Rédacteur des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Président de la Société durant des longues années, décédé à Cracovie en novembre de 1942.

SUR L'ÉQUIVALENCE DES POLYÈDRES

Note complémentaire par M. Henri Lebesgue, Paris

Sous le même titre j'ai démontré, dans ces Annales, t. XVII, année 1938, p. 218, un théorème de M. Dehn. Je disais:

„Nous sommes partis de deux polyèdres, ou systèmes de polyèdres, D et D', divisés respectivement en polyèdres d_i et d'_i congruents; nous avons considéré un segment s_n d'une arête de l'un des d_i pris aussi grand que possible sans qu'il contienne un sommet des d_i à son intérieur et, à ce segment de longueur σ_n, nous avons attaché la somme Σ_n des diètres a_p des d_i qu'on rencontre en tournant autour de s_n. Or, on a:

(1) $$\Sigma_n = A_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

suivant les cas". Puis, considérant toutes les expressions (2) des longueurs l_h et L_k des arêtes des d_i et de D, exprimées comme sommes de σ_n, j'imaginais qu'on les ait résolues par rapport aux σ_n et obtenu ainsi des expressions (3) des σ_n comme sommes algébriques des l_h et L_k. Mais, j'ai eu le tort de me borner à affirmer la possibilité de cette résolution sans en détailler la démonstration, simple mais minutieuse, et je n'ai pas aperçu qu'avec la définition donnée plus haut la résolution serait parfois impossible. Il faut modifier la définition des s_n et des σ_n en ajoutant: *toutefois, si plusieurs segments donnent la même équation* (1) *c'est la réunion de ces segments qu'on appellera s_n et c'est la somme de leurs longueurs qu'on représentera par σ_n.*

Pour montrer qu'après cette modification les relations (3) existent bien, précisons que, par une même équation, on entend celle formée avec les mêmes symboles a et A pris différents pour les divers dièdres, qu'ils soient inégaux ou égaux. Même, s'il arrivait que deux faces aient toutes deux les segments AB et CD de la ligne d'intersection de leurs plans pour cotés,

AB et CD seraient considérés comme deux arêtes différentes de deux dièdres différents, même si ceux-ci, limités par les mêmes demi-plans, étaient géométriquement identiques. Alors, si deux segments donnent une même équation (1), soit E_1, tous les a ou A contenus dans cette équation doivent aussi figurer dans les équations E_2 relatives aux segments intermédiaires, les seconds membres des E_2 doivent donc être plus grands que celui de E_1; celui-ci ne doit donc pas être un A, car alors il ne pourrait varier, ni être 2π, car alors il ne pourrait pas croître. C'est donc pour les seuls seconds membres égaux à π que s_n peut comprendre plusieurs segments.

Soit az un segment de droite, pris aussi grand que possible couvert par des arêtes des d_i et soient $a, b, \ldots, y, z$ les points origines et extrémités de ces arêtes — ce ne sont donc pas tous les sommets des d_i qui peuvent être sur az. Nous avons des équations $E(ab), E(bc), \ldots$; deux équations consécutives sont certainement différentes car, en employant les signes contient $\supset$ et contenu dans $\subset$ et des notations telles que $a(ab)$, $dm(ab)$ pour désigner les a relatifs à ab et le deuxième membre de $E(ab)$ on n'a, en b par exemple, que les hypothèses suivantes:

1° $a(ab) \supset a(bc)$ $dm(ab) > dm(bc)$; b est extrémité d'un l_h;

2° $a(ab) \subset a(bc)$ $dm(ab) < dm(bc)$; b est origine d'un l_h;

3° aucune des deux précédentes hypothèses n'est remplie; b est à la fois origine et extrémité d'un l_h. Dans le cas 1°, ou a) $dm(bc)$ est un A, ou b) $dm(ab) = \pi$; dans le premier de ces sous-cas, 1° a), b est origine d'un L_k. De même dans 2°, ou a) $dm(ab)$ est un A, ou b) $dm(ab) = \pi$, et, dans 2° a), b est extrémité d'un L_k. Donc, si, par exemple, fg est le premier segment pour lequel $dm = \pi$, les segments précédents sont chacun un s_n et les distances ab, ac, ad, ae, af sont des sommes de l et L puisque b, c, d, e, f sont à la fois origines et extrémités d'arêtes des d_i ou de D. Il en résulte que les σ_n égaux à ab, bc, cd, de, ef sont des sommes algébriques de l et L affectés des coefficients $+1$ ou -1. L'équation $E(fg)$ peut aussi être attachée à d'autres segments que fg; supposons la aussi attachée à lm, et à pq et seulement à ces trois segments qui formeront donc un s_n, soit s_ν. Les $a(fg) = a(lm) = a(pq)$ sont donc contenus dans tous les a des segments intermédiaires et peut-être dans d'autres, soit

jusqu'à $a(rs)$. s sera donc l'extrémité d'un l dont l'origine sera le point f ou antérieur au point f. Donc as est une somme de l et L. Pour chacun des segments gh, hi, ij, jk, kl; mn, no, op; qr, rs, le dm surpasse π, donc chacun de ces segments est un s_n. Pour comparer les $a(hi)$ et $a(ij)$, par exemple, il n'y a pas lieu de s'occuper des $a(fg)$ qui sont communs aux deux familles de dièdres et par suite on est ramené au cas précédent, c'est à dire que h, i, j, k, l sont extrémités d'arêtes des d_i ou de D dont les origines ne sont pas en deça de g et que g, h, i, j, k sont origines d'arêtes des d_i ou de D dont les extrémités ne sont pas au delà de k. A l'aide des l_i et L_i correspondant à ces arêtes on a les longueurs σ de gh, hi, ij, jk, kl. De même se calculent les longueurs σ de mn, no, op et celles de qr et rs.

σ_ν seul n'a pas été calculé; mais la somme de tous les σ jusqu'ici considérés est la quantité connue as, d'où σ_ν. Si, de plus, on remarque que c'est seulement dans le calcul de rs qu'interviennent des l et L qui se trouvent dans l'expression de as on en conclut encore que, dans les expressions (3) obtenues, les coefficients des l et L sont $+1$ et -1, ou naturellement zéro; remarque d'ailleurs accessoire.

Le raisonnement se poursuit de la même façon; la lacune que comportait mon exposé, et dont je suis seul responsable, est ainsi comblée.

SUR LES SUITES DE POLYNÔMES ET LA FONCTION DE GREEN GÉNÉRALISÉE I

Par F. LEJA, Kraków

1. Soit E un ensemble fermé et borné des points du plan, $D(E)$ le domaine connexe complementaire à E contenant le point à l'infini et F la frontière de $D(E)$. Il est clair que F est contenu dans E et que $D(F)=D(E)$.

Étant donné un système de $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ de E, que nous désignerons aussi par une seule lettre $\zeta=\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}$, posons

$$V(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|,\qquad \Delta_n^{(j)}(\zeta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}(\zeta_j-\zeta_k),$$

et soit $V_n=V_n(E)$ la valeur maxima du produit $V(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)$ lorsque les points $\zeta_0,\ldots,\zeta_n$ varient arbitrairement dans E et

$$\eta=\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_n\} \tag{1}$$

un système des points de E pour lesquels

$$V(\eta_0,\ldots,\eta_n)=V_n=V_n(E) \tag{2}$$

et

$$|\Delta_n^{(0)}(\eta)|\leqslant|\Delta_n^{(j)}(\eta)|\qquad \text{pour } j=0,1,\ldots,n. \tag{3}$$

Nous dirons que les points (1) forment un *système harmonique* du degré n de l'ensemble E si la condition (2) est remplie. Un tel système est toujours situé dans la partie F de E, ce qui résulte du principe de maximum.

Formons les polynômes

$$L_n^{(j)}(z,\zeta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k},\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

et désignons par $L_n(z,E)$ la fonction de z définie dans le plan entier par la formule

$$L_n(z,E) = \underset{(\zeta \in E)}{\text{borne inf}} \{\max_{(j)} |L_n^{(j)}(z,\zeta)|\}. \tag{4}$$

D'autre part, formons les polynômes

$$L_n^{(0)}(z,\eta), L_n^{(1)}(z,\eta), \ldots, L_n^{(n)}(z,\eta) \tag{5}$$

correspondants au système (1) et considérons la suite [1])

$$L_n^{(0)}(z,\eta) = \frac{z-\eta_1}{\eta_0-\eta_1} \cdots \frac{z-\eta_n}{\eta_0-\eta_n}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{6}$$

On sait que la suite $\{V_n^{\frac{2}{n(n+1)}}\}$ tend en décroissant vers une limite $d(E)$ dite le *diamètre transfini* de l'ensemble E [2]). Puisque $V_n(E) = V_n(F)$, on a $d(E) = d(F)$.

Je dis qu'on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Delta_n^{(0)}(\eta)|} = d(F). \tag{7}$$

En effet, soit $T_n(z,E)$ le n-ième polynôme de Tchebycheff attaché à E et $r_n^n = \max_{(z\in E)} |T_n(z,E)|$. On sait [2]) que $\lim_{n\to\infty} r_n = d(E)$ donc, puisque

$$[V(\eta_0,\ldots,\eta_n)]^2 = \prod_{j=0}^{n} |\Delta_n^{(j)}(\eta)| \geqslant |\Delta_n^{(0)}(\eta)|^{n+1}$$

et que

$$|\Delta_n^{(0)}(\eta)| = \max_{(z\in E)} |(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n) \geqslant r_n^n,$$

on a

$$r_n \leqslant \sqrt[n]{|\Delta_n^{(0)}(\eta)|} \leqslant [V_n(E)]^{\frac{2}{n(n+1)}},$$

d'où résulte (7).

J'ai démontré ailleurs [3]) que les suites (4) et (6) jouissent des propriétés suivantes:

---

[1]) Il serait plus naturel de désigner les points (1) par $\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\}$ car leur position dans F dépend de n. Je les ai désignés plus brièvement pour simplifier l'écriture.

[2]) M. Fekete: Math. Zeit., t. 17 (1923), p. 228–249.

[3]) Annales de la Soc. Polon. Math. t. 12 (1934), p. 57–71. Voir les théorèmes 1 et 2, pages 65 et 67. Le théorème II du présent travail résulte immédiatement du théorème 1 (p. 65) et de l'inégalité (35), p. 68. — Observons que la fonction limite $L(z,E)$ du présent travail a été désignée auparavant par $\lambda(z)$.

I. *Si* $d(E)>0$, *la suite* $\{\sqrt[n]{L_n(z,E)}\}$ *tend dans le plan entier vers une limite finie* $L(z,E)$ remplissant les conditions:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n(z,E)} = L(z,E)\begin{cases} \geqslant 1 \text{ dans } D(E), \\ =1 \text{ ailleurs.}\end{cases}$$

Si $d(E)=0$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n(z,E)} = \begin{cases} \infty \text{ en dehors de } E, \\ 1 \text{ dans } E.\end{cases}$$

II. *Si* $d(E)>0$ *la suite* $\{\sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z,\eta)|}\}$ *converge en dehors de* F *et on a*

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z,\eta)|} = L(z,E),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point extérieur à F[4]).

La fonction $L(z,E)$ définie par la formule (8) jouit de plusieurs propriétés remarquables. En particulier:

Si F *est une somme de continus, le logarithme*

$$\log L(z,E)$$

est continu dans le plan entier et se réduit à la fonction de Green du domaine $D(F)$ *avec le pôle à l'infini.*

Dans le travail présent nous allons continuer l'étude de la fonction $L(z,E)$ dans le cas le plus général, où F remplit la seule condition

$$d(F)>0.$$

2. Observons d'abord que les fonctions $L(z,E)$ et $L(z,F)$ sont toujours identiques

$$L(z,E)\equiv L(z,F),$$

---

[4]) On peut compléter ce théorème comme il suit: *Si* $d(E)=0$ *la limite* (9) *existe en dehors de* F, *mais elle est partout infinie.*

En effet, formons les fonctions $L_n(z,F)$, $n=1,2,\dots$ attachées à l'ensemble F. D'après le théorème I on a en dehors de F $\lim \sqrt[n]{L_n(z,F)}=\infty$ et d'après l'inégalité (35) du travail précité cette dernière limite est égale à la limite (9).

ce qui résulte de l'égalité (9) et du fait que les polynômes $L_n^{(0)}(z,\eta)$ ne dépendent que de la frontière F. Les théorèmes I et II peuvent facilement être complétés comme il suit:

III. *La fonction* $\log L(z,F)$ *est harmonique en dehors de* F. *On a dans le domaine* $D(F)$ $L(z,F)>1$ *et*

$$(10) \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{L(z,F)}{|z|} = \frac{1}{d(F)}$$

En effet, il résulte du théorème II que $\log L(z,F)$ est une fonction harmonique en dehors de F. D'autre part, on a d'après (6)

$$\frac{\sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z,\eta)|}}{|z|} = \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta_n^{(0)}(\eta)}} \cdot \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{\eta_1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{\eta_n}{z}\right)\right|},$$

d'où l'on déduit (10) en vertu de (7). La fonction $\log L(z,F)$ est donc positive pour des valeurs assez grandes de $|z|$ et comme elle est harmonique et non-négative dans $D(F)$ elle doit être positive dans ce domaine, d'où résulte l'inégalité $L(z,F)>1$.

Il suit de cette proposition que la fonction $L(z,F)$ est continue en dehors de F. Nous allons examiner la continuité de $L(z,F)$ aux points de F, où le logarithme de $L(z,F)$ cesse en général d'être harmonique et où l'on a d'après (8)

$$L(z,F)=1.$$

En m'appuaynt sur un lemme général[5]) j'ai démontré dans le travail précédent que: $L(z,F)$ *est continu en tout point tel de* F *qui est situé sur un continu quelconque appartenant à* F. On verra qu'en tout point isolé de F $L(z,F)$ cesse d'être continue.

3. Considérons le cas général, où la frontière F est quelconque et soit z_0 un point de F. Désignons par $V(z_0)$ un voisinage fermé quelconque de z_0 et par $F\cdot V(z_0)$ la partie de F contenue dans $V(z_0)$.

---

[5]) Voici ce lemme: *Si une suite de polynômes:* $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$, $n=0,1,2,\dots$, *est uniformément bornée sur un continu* C, *on peut faire correspondre à tout point* z_0 *de* C *et à tout* $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$ *un voisinage* $V(z_0,\varepsilon)$ *de* z_0 *tel que la suite* $\{P_n(z)(1-\varepsilon)^n\}$ *soit uniformément bornée dans* $V(z_0,\varepsilon)$.

Je dirai que *le diamètre transfini de F au point z_0 est positif* si, quel petit que soit $V(z_0)$, on a toujours $d[F \cdot V(z_0)] > 0$. Dans le cas contraire nous dirons, que *le diamètre transfini de F au point z_0 est égal à zéro.*

Ceci posé, partageons les points de F en deux ensembles disjoints P et N

(11) $$F = P + N$$

dont P contient tous les points de F en lesquels le diamètre transfini de F est positif et N tous ceux en lesquels il est égal à zéro. Il est évident que les points d'accumulation de l'ensemble P appartiennent à P, donc P est fermé. Je dis que:

IV. *Le diamètre transfini de l'ensemble F est égal à celui de sa partie P:*

$$d(F) = d(P).$$

En effet, désignons par $P(\varrho)$ l'ensemble de tous les points du plan dont la distance de l'ensemble P ne surpasse pas $\varrho > 0$ et partageons F en deux ensembles

$$F = P_\varrho + N_\varrho,$$

où P_ϱ désigne la partie de F contenue dans $P(\varrho)$ et N_ϱ est la différence $F - P_\varrho$ augmentée de ses points d'accumulation. Puisque $d(N_\varrho) = 0$, on a [6])

$$d(F) = d(P_\varrho),$$

et puisque $P \subset F$ et $P_\varrho \subset P(\varrho)$ on a

$$d(P) \leqslant d(F) \leqslant d[P(\varrho)],$$

d'où résulte notre proposition car $\lim_{\varrho \to 0} d[P(\varrho)] = d(P)$ [7]).

---

[6]) Je m'appuie sur les deux lemmes suivants:

A. *Si E est un ensemble fermé et borné et si le diamètre transfini de E en chacun de ses points est nul, on a $d(E) = 0$.*

B. *Si E et E' sont des ensembles fermés et bornés et si $d(E') = 0$, on a $d(E + E') = d(E)$.*

Voici la démonstration du lemme A: À tout point z de E on peut, associer un voisinage $V(z)$ tel que $d[E \cdot V(z)] = 0$, et, comme E est fermé, il existe un nombre fini de ces voisinages recouvrant E. L'ensemble E est donc une somme finie d'ensembles fermés dont les diamètres transfinis sont nuls et par suite $d(E) = 0$ en vertu du lemme B. Le lemme B est bien connu.

[7]) M. Fekete: Math. Z., t. 32 (1930), p. 108—114.

4. Nous allons démontrer que:

V. *Les fonctions* $L(z,F)$ *et* $L(z,P)$ *sont identiques dans le domaine* $D(F)$.

Démonstration. Soient E et E' deux ensembles fermés et bornés quelconques. Je dis que, quelque soit z, on a

$$(12) \qquad L(z,E) \leqslant L(z,E'), \qquad \text{si } E \supset E'.$$

En effet, étant d'après (4)

$$L_n(z,E) \leqslant \underset{(\zeta \in E')}{\text{borne inf}} \{\max_{(j)} |L_n^{(j)}(z,\zeta)|\} = L_n(z,E'),$$

on a $\sqrt[n]{L_n(z,E)} \leqslant \sqrt[n]{L_n(z,E')}$, d'où l'on déduit (12).

Il en résulte que $L(z,F) \leqslant L(z,P)$ et par suite la fonction $\log L(z,P) - \log L(z,F)$ est non-négative dans le domaine $D(F)$. Mais cette fonction est harmonique dans $D(F)$ le point à l'infini y compris et prend en ce point, d'après (10), la valeur

$$\log \frac{1}{d(P)} - \log \frac{1}{d(F)} = 0, \qquad \text{car } d(P) = d(F),$$

donc il suit du principe de maximum que la différence $\log L(z,P) - \log L(z,F)$ s'annule identiquement dans $D(F)$.

Il résulte de ce théorème que:

VI. *La fonction* $L(z,F)$ *est discontinue aux points de* F *en lesquels le diamètre transfini de* F *s'annule*[8]).

En effet, si z tend vers un point z_0 de N en restant toujours dans le domaine $D(F)$, la fonction $L(z,F)$ tend vers la même limite que $L(z,P)$ et comme z_0 appartient au domaine $D(P)$ en lequel la fonction $L(z,P)$ est continue, on voit que

$$\lim_{z \to z_0} L(z,F) = L(z_0,P).$$

Mais on a d'après III $L(z_0,P) > 1$ et d'après I $L(z_0,F) = 1$, donc $L(z,F)$ est discontinue au point z_0.

Il résulte des propositions précédentes que, si la partie P de F est une somme de continus, la fonction

$$G(z,F) = \log L(z,F)$$

---

[8]) C'est-à-dire aux points de l'ensemble N, si cet ensemble n'est pas vide. L'ensemble P n'est jamais vide car $d(F) > 0$.

jouit dans le domaine $D(F)$ des propriétés suivantes: 1° elle y est harmonique et positive, 2° quand z tend vers un point z_0 de F, en restant toujours dans $D(F)$, elle tend vers une limite déterminée g, où $g=0$ si z_0 appartient à P et $g>0$ si z_0 appartient à la partie N de F, 3° quand z tend vers l'infini on a

$$\lim \{G(z,F)-\log|z|\}=\log\frac{1}{d(F)}\cdot$$

Par conséquent:

VII. *Si la partie P de F est une somme de continus,* $\log L(z,F)$ *est la fonction de Green classique ou généralisée du domaine $D(F)$ avec le pôle à l'infini suivant que la partie $N=F-P$ de F est vide ou non.*

5. Soient E et E' deux ensembles fermés et bornés quelconques. On sait que, si E' est contenu dans E ou si $d(E')=0$, on a $d(E+E')=d(E)$. Nous allons démontrer que:

VIII. *Si E' est situé dans l'intérieur du domaine $D(E)$ et si $d(E')>0$, on a*

$$d(E+E')>d(E).$$

Démonstration. Le cas $d(E)=0$ n'exigeant pas la démonstration, supposons que $d(E)>0$ et formons la fonction $L(z,E)$. D'après III $L(z,E)$ est continue dans l'ensemble E' et y supasse 1 donc, comme E' est fermé, il existe un nombre positif δ tel que

$$L(z,E)>1+3\delta \qquad \text{dans } E'.$$

D'autre part, il existe d'après II un indice $N_1(\delta)$ tel qu'on a dans E'

$$\sqrt[\mu]{|L_n^{(0)}(z,\eta)|}>L(z,E)-\delta \qquad \text{pour } \mu>N_1(\delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{|(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_\mu)|}>(1+2\delta)\sqrt[\mu]{|\Delta_\mu^{(0)}(\eta)|}$$

d'où l'on déduit en vertu de (7) l'inégalité

$$(13)\qquad \sqrt[\mu]{|(z-\eta_0)(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_\mu)|}>(1+\delta)d(E), \text{ pour } \mu>N_2(\delta),$$

ayant lieu dans E' pourvu que le nombre $N_2(\delta)$ soit suffisamment grand.

Posons $n=\mu+\nu$ et soit $\{\eta_0, \eta_1, ..., \eta_\mu\}$ un système harmonique de $\mu+1$ points de E et $(\eta_{\mu+1}, ..., \eta_n)$ un tel système de ν points de E'; on a donc

$$V_\mu(E)=V(\eta_0, ..., \eta_\mu) \quad \text{et} \quad V_{\nu-1}(E')=V(\eta_{\mu+1}, ..., \eta_\mu).$$

Puisque

$$V_n(E+E') \geqslant V(\eta_0, ..., \eta_\mu, \eta_{\mu+1}, ..., \eta_n)$$

il suit de l'identité

$$V(\eta_0, ..., \eta_n)=V(\eta_0, ..., \eta_\mu) \cdot V(\eta_{\mu+1}, ..., \eta_n) \cdot \prod_{k=\mu+1}^{n} |(\eta_k-\eta_0)...(\eta_k-\eta_\mu)|$$

et de l'inégalité (13) que

$$V_n(E+E') \geqslant V_\mu(E) \cdot V_{\nu-1}(E') \cdot [(1+\delta)d(E)]^{\mu\nu}, \quad \text{si } \mu > N_2(\delta).$$

Posons pour simplifier l'écriture $d(E)=d$ et $d(E')=d'$ et observons que les suites

$$\{V_\mu(E)^{\frac{2}{\mu(\mu+1)}}\}, \qquad \{V_{\nu-1}(E')^{\frac{2}{\nu(\nu-1)}}\}$$

tendent en décroissant respectivement vers d et d' donc

$$V_n(E+E') \geqslant d^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \cdot d'^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} [(1+\delta)d]^{\mu\nu}$$

et par suite

$$[V_n(E+E')]^{\frac{2}{n(n+1)}} \geqslant d^{\frac{\mu(\mu+1)}{n(n+1)}} \cdot d'^{\frac{\nu(\nu-1)}{n(n+1)}} [(1+\delta, d]^{\frac{2\mu\nu}{n(n+1)}}.$$

Faisons tendre n et ν vers l'infini de manière que ν/n tende vers une limite α remplissant la condition $0<\alpha<1$. Alors μ/n tend vers $1-\alpha$ et la dernière inégalité donne

$$d(E+E') \geqslant d^{(1-\alpha)^2} d'^{\alpha} [(1+\delta)d]^{2\alpha(1-\alpha)}$$

ou

$$d(E+E') \geqslant d\left[\left(\frac{d'}{d}\right)^{\alpha} (1+\delta)^{2(1-\alpha)}\right]^{\alpha}.$$

Notre proposition résulte immédiatement de cette inégalité car, si $\alpha \to 0$, l'expression

$$\left(\frac{d'}{d}\right)^{\alpha} (1+\delta)^{2(1-\alpha)}$$

tend vers la limite $(1+\delta)^2>1$.

[A suivre]

REMARQUES SUR LES INTÉGRALES DE STIELTJES EN CONNEXION AVEC CELLES DE MM. RADON ET FRÉCHET

Par O. NIKODYM, Warszawa

1. Le but de la note présente est la démonstration d'un théorème jettant de la lumière sur les intégrales de STIELTJES en connexion avec celles de MM. RADON [1] et FRÉCHET [2] [1]. Le dit théorème concernant la prolongation d'une mesure additive sera énoncé à la fin de la note. Il sera exprimé d'une manière un peu plus générale: à savoir on va considérer des mesures vectorielles au lieu de mesures ordinaires. La généralité admise, se rattachant à un de mes travaux [4] ne cause point des complications dans la démonstration et, d'autre part, elle met mieux en évidence le rôle des hypothèses. Nous ne considérons que le cas linéaire quoique celui de plusieurs dimensions ne semble pas être trop difficile et principiellement différent. De plus, nous envisageons l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en vu d'applications aux formules donnant la représentation spectrale des opérateurs symétriques hypermaximales dans l'espace vectoriel de HILBERT-HERMITE [5].

Si l'on se sert des intégrales de STIELTJES $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dg$, on suppose d'habitude que $g(x)$ est continue d'un côté, p. ex. du coté droit [5]. On verra dans ce qui va suivre que cette hypothèse est bien naturelle et en connexion avec la possibilité de la généralisation „lebesguienne" de l'intégrale. Dans cet ordre d'idées faisons la remarque suivante qui semble être principielle: il se montre très avantageux et très maniable de considérer les intervalles $(a, b\rangle$, ouverts du côté gauche et

---

[1]) Voir aussi [3].

fermés du côté droit, plutôt que des intervalles ouverts ou fermés. On rencontre, d'ailleurs, de tels intervalles ou rectangles sémifermés dans des différents travaux.

Notations:

$a \underset{\text{df}}{=} b$ désigne que a est, par définition, identique avec b.

Ia: l'ensemble composé du seul élément a.

co a: le complémentaire de l'ensemble a par rapport à une variété donnée 1; co $a \underset{\text{df}}{=} 1-a$.

0 désigne l'ensemble vide.

$a \epsilon b$: l'élément a appartient à la classe b.

(a,b), $(a,b\rangle$, $\langle a,b)$, $\langle a,b\rangle$ désignent respectivement les intervalles $a<x<b$, $a<x\leqslant b$, $a\leqslant x<b$, $a\leqslant x\leqslant b$.

On va considérer des nombres impropres $-\infty$, $+\infty$ qui se définissent aisément par la méthode de CANTOR ou DEDEKIND.

On va considérer l'espace vectoriel de M. BANACH. Pour la définition axiomatique respective nous renvoyons le lecteur au travail de M. BANACH [6]. La valeur absolue (norme) du vecteur $\vec{x}$ sera désignée par $|\vec{x}|$. Mentionnons que ce nombre jouit, entre autres, des propriétés suivantes:

$$|\vec{x}| \geqslant 0, \quad |\vec{x}+\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|+|\vec{y}|, \quad |\lambda\vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|,$$

où λ est un nombre réel. De plus, la convergence $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ se définit par la relation:

$$\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{x}| = 0.$$

2. Soit donné une fonction $\vec{\varrho}(x)$ définie dans $\langle -\infty, +\infty\rangle$ et dont les valeurs sont des vecteurs d'un espace de M. BANACH [1]). Considérons la plus petite classe (A) de sous-ensembles de $(-\infty, +\infty\rangle$, contenant chaque intervalle $(a,b\rangle$, où $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ et jouissant des propriétés suivantes:

1° si $E, F \epsilon (A)$, alors $E+F \epsilon (A)$,

2° si $E \epsilon (A)$, alors co $E \epsilon (A)$ [2]).

---

[1]) Il est sousentendu que $\vec{\varrho}(-\infty)$ et $\vec{\varrho}(+\infty)$ sont des vecteurs bien déterminés.

[2]) co$E = (-\infty, +\infty\rangle - E$.

Si $E, F \epsilon (A)$, alors $E \cdot F \epsilon (A)$ et $E - F \epsilon (A)$. Evidemment l'ensemble vide 0 et l'ensemble universel $1 \underset{\text{df}}{=} (-\infty, +\infty\rangle$ appartiennent à (A).

On peut démontrer sans peine que, si $E \epsilon (A)$, $E \neq 0$ alors il existe un nombre fini d'intervalles disjoints $(a_i, b_i\rangle$ dont la somme est égale à E. Appelons une telle représentation: *représentation canonique de E*.

Attribuons à chaque ensemble $E \epsilon (A)$ une *mesure* généralisée, en posant

1° $\vec{\mu}(0) \underset{\text{df}}{=} \vec{0}$,

2° si $E = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle$, où les termes de la somme sont disjoints deux-à-deux,

$$\vec{\mu}(E) \underset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} (\vec{\varrho}(b_i) - \vec{\varrho}(a_i)).$$

On voit aisément que la fonction $\vec{\mu}(E)$ est ainsi bien définie (parce que ce vecteur ne dépend pas du choix de la représentation canonique de E). De plus la fonction $\vec{\mu}(E)$ est *additive*, c'est-à-dire, si $E, F \epsilon (A)$, $E \cdot F = 0$ on a $\vec{\mu}(E+F) = \vec{\mu}(E) + \vec{\mu}(F)$.

On voit aisément que $\vec{\mu}(E)$ peut être définie par la condition d'additivité ajoutée aux conditions suivantes: $\vec{\mu}(0) = \vec{0}$, $\vec{\mu}(a, b\rangle = \vec{\varrho}(b) - \vec{\varrho}(a)$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$.

3. Cela étant posé, considérons la plus petite classe (B) de sous-ensembles de $(-\infty, +\infty\rangle$, contenant tous les ensembles de (A), contenant avec chaque ensemble aussi son complémentaire, et *parfaitement additive*, ce qui veut dire que, si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \epsilon (B)$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \epsilon (B)$. Évidemment (B) est la classe de tous les sous-ensembles boréliens de $(-\infty, +\infty\rangle$.

Le problème qui nous intéresse consiste à *trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire* $\vec{\varrho}(x)$ *pour que la fonction mesurante* $\vec{\mu}(E)$ *puisse être prolongée à tous les ensembles de* (B) *de manière que, si* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \epsilon (B)$, $E_i \cdot E_k = 0$ *pour* $i \neq k$, *on ait* $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(E_n) = \vec{\mu}(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)$.

4. Tout d'abord, quelques délibérations préliminaires nous forcent d'admettre pour la notion de la norme $|\vec{x}|$ de vecteurs la *condition suplémentaire suivante:*

(α) ... *Si* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ *est une suite infinie de vecteurs telle que pour chaque suite partielle* $\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \ldots, \vec{x}_{k_n}, \ldots$ *extraite de* $\{\vec{x}_n\}$ *la somme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_{k_n}$$

converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |\vec{x}_n| < \infty$.

Cette condition est satisfaite p. ex. dans le cas, où les vecteurs sont des nombres réels ou des nombres complexes. Elle ne subsiste pas p. ex. dans le cas de vecteurs de l'espace unitaire (de Hilbert-Hermite). En effet, étant donnée une suite orthonormale:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \ldots,$$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{i,k},$$

posons $\vec{x}_n \underset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{n} \vec{e}_n$.

On a: $|\vec{x}_n| = 1/n$; donc $\sum_{n=1}^{\infty} |\vec{x}_n|$ diverge, tandis que toute somme $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_{k_n}$ converge, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$.

Dans le cas considéré il faudrait remplacer la norme des vecteurs par son carré, et cela non seulement dans la condition (α) mais aussi dans la définition de la variation bornée qui va être formulée prochaînement.

5. Admettons l'hypothèse (α) et supposons que la prolongation de la mesure soit possible. *Nous démontrerons qu'alors la fonction* $\vec{\varrho}(x)$ *est à variation bornée.* Nous entendons par cela qu'il existe un nombre positif $M > 0$ tel que, si les

(1) $$(a_1, b_1\rangle, \ldots, (a_n, b_n\rangle \qquad (n \geqslant 1)$$

sont disjoints, on a

(2) $$\sum_{i=1}^{n} |\vec{\varrho}(b_i) - \vec{\varrho}(a_i)| \leqslant M.$$

Démonstration. Supposons qu'un tel nombre M n'existe pas. Il existe alors une suite infinie de systèmes (1) pour lesquels la somme (2) croît indéfiniment. Il existe, à fortiori,

une suite infinie de divisions finies de l'intervalle $(-\infty, +\infty\rangle$ pour lesquelles les sommes respectives tendent vers l'infinie. Ayant une division de $(-\infty, +\infty\rangle$, l'introduction des nouveaux points de subdivision ne peut pas diminuer la somme respective. Par conséquent, on peut trouver une suite infinie de divisions $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ de $(-\infty, +\infty\rangle$ telle que chaque division suivante contient tous les points de la précédente, et que les sommes (2) respectives $s_1, s_2, \ldots$ sont >0 et croissent indéfiniment. Évidemment $\{\Pi_n\}$ peut être choisi de manière que, si $(\alpha_n, \beta_n\rangle$ appartient à la division Π_n et si $(\alpha_1, \beta_1\rangle \supset (\alpha_2, \beta_2\rangle \supset \ldots$, alors $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$ (n. b. cette limite pouvant aussi être égale à $+\infty$ on à $-\infty$).

Il existe dans Π_1 au moins un intervalle dont les divisions engendrées par $\Pi_2, \Pi_3, \ldots$ donnent des sommes[1]) formant une suite non bornée. Soit $(\gamma_1, \delta_1\rangle$ un tel intervalle et supposons que ce sont les subdivisions produites par $\Pi_{k_1}, \Pi_{k_2}, \ldots, \Pi_{k_n}, \ldots$ qui donnent des sommes tendant vers l'infini. On peut évidemment supposer que toutes ces sommes sont $\geqslant 1$.

D'une manière analogue il existe dans $(\gamma_1, \delta_1\rangle$ au moins un intervalle $(\gamma_2, \delta_2\rangle$ de Π_{k_1} dont les subdivisions engendrées par $\Pi_{k_2}, \Pi_{k_3}, \ldots$ donnent des sommes formant une suite non bornée. Soit $\Pi_{k'_2}, \Pi_{k'_3}, \ldots$ une suite partielle extraite de $\Pi_{k_2}, \Pi_{k_3}, \ldots$, donnant dans $(\gamma_2, \delta_2\rangle$ des sommes positives $\geqslant 2$ et tendant vers l'infini.

En continuant indéfiniment le procédé indiqué et facile à préciser au moyen du principe de l'induction, on obtient une suite infinie d'intervalles

$$(\gamma_1, \delta_1\rangle \supset (\gamma_2, \delta_2\rangle \supset \ldots$$

et une suite infinie $\Pi', \Pi'', \ldots$ extraite de $\{\Pi_n\}$, telles que $\Pi^{(n)}$ engendre dans $(\gamma_n, \delta_n\rangle$ une division donnant la somme $\geqslant n$. On a de plus $\lim\limits_n \gamma_n = \lim\limits_n \delta_n$.

Cela étant posé, soient

$$(3) \qquad (\gamma'_{n1}, \delta'_{n1}\rangle, \quad (\gamma'_{n2}, \delta'_{n2}\rangle, \ldots$$

tous les intervalles de la division $\Pi^{(n-1)}$ contenus dans $(\gamma_{n-1}, \delta_{n-1}\rangle$ et différents de $(\gamma_n, \delta_n\rangle$.

---

[1]) Les termes des sommes concernant seulement les sous-intervalles de $(\gamma_1, \delta_1\rangle$.

Les intervalles (3), $(n=1,2,...)$ étant disjoints et la prolongation de la mesure étant, par hypothèse, possible, la somme de mesures de n'importe quels intervalles pris de (3) converge. Donc, en vertu de la condition (α) la somme des nombres

$$|\vec{\mu}(\gamma'_{ni}, \delta'_{ni}\rangle| = |\vec{\varrho}(\delta'_{ni}) - \vec{\varrho}(\gamma'_{ni})|$$

converge aussi.

Posons

$$N \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n,i} |\vec{\mu}(\gamma'_{ni}, \delta'_{ni}\rangle|.$$

On a, en considérant la subdivision de $(\gamma_{n-1}, \delta_{n-1}\rangle$ produite par $\Pi^{(n-1)}$:

$$|\vec{\mu}(\gamma_n, \delta_n\rangle| + \sum_i |\vec{\mu}(\gamma_{ni}, \delta_{ni}\rangle| \geqslant n-1,$$

d'où

$$|\vec{\mu}(\gamma_n, \delta_n\rangle| + N \geqslant n-1, \qquad (n=1,2,...)$$

ce qui entraîne

$$|\vec{\mu}(\gamma_n, \delta_n\rangle| \to \infty. \tag{4}$$

Mais, l'additivité parfaite de la mesure $\vec{\mu}$ prolongée implique la relation

$$\lim_n \vec{\mu}(\gamma_n, \delta_n\rangle = \vec{\mu}(Ia),$$

où $a \underset{\mathrm{df}}{=} \lim_n \gamma_n = \lim_n \delta_n$

Par conséquent, $\lim_n |\vec{\mu}(\gamma_n, \delta_n\rangle|$ est fini ce qui n'est pas d'accord avec la relation (4).

La contradiction trouvée ainsi démontre, par impossible, que la fonction $\vec{\varrho}(x)$ est à variation bornée.

6. On démontre aisément que pour une telle fonction la limite

$$\vec{\varrho}(x_0+0) \underset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\substack{x_n > x_0 \\ x_n \to x_0}} \vec{\varrho}(x_n),$$

existe pour chaque $x_0 < \infty$ et la limite

$$\vec{\varrho}(x_0-0) \underset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\substack{x_n < x_0 \\ x_n \to x_0}} \vec{\varrho}(x_n)$$

existe pour pour chaque $x_0 > -\infty$.

7. Nous allons démontrer maintenant que, *si la prolongation de la mesure est possible, on a*

$$\vec{\varrho}(x+0)=\vec{\varrho}(x)$$

pour $-\infty \leqslant x < +\infty$.

Démonstration. Soit $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$.

On a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (x_0, x_n\rangle = 0,$$

d'où, en vertu de la continuité de la mesure — ce qui résulte de son additivité parfaite —

$$\lim_n \vec{\mu}(x_0, x_n\rangle = \vec{0},$$

c'est-à-dire:

$$\lim_n \vec{\varrho}(x_n) = \vec{\varrho}(x_0).$$

8. Nous avons trouvé deux conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire $\vec{\varrho}(x)$ afin que la mesure soit prolongeable. Notre but est maintenant la démonstration que ces conditions sont aussi suffisantes.

Définissons d'abord une notion auxiliaire.

Étant donné un intervalle arbitraire $(a,b\rangle$ désignons par $\mu^*(a,b\rangle$ la borne supérieure des nombres

$$\sum_{i=1}^{n} |\vec{\mu}(a_i, b_i\rangle|, \qquad (n \geqslant 1),$$

où les $(a_i, b_i\rangle$ sont disjoints et contenus dans $(a,b\rangle$.

Cela étant posé, nous allons nous appuyer sur le théorème suivant [1]).

Si, quels que soient les intervalles $(r,s\rangle$, $(r_n, s_n\rangle$, $n=1,2,\ldots$ tels que

$$(r,s\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (r_n, s_n\rangle,$$

[1]) Voir [4].

les $(r_n, s_n\rangle$ étant disjoints deux-à-deux, on a

$$|\vec{\mu}(r,s\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(r_n, s_n\rangle,$$

alors la mesure μ est prolongeable dans le sens qui nous interesse.

9. Cela étant préparé, supposons que la fonction $\vec{\varrho}(x)$ est à variation bornée et que, de plus, $\vec{\varrho}(x+0) = \vec{\varrho}(x)$ pour chaque x, où $-\infty \leqslant x < +\infty$.

Démontrons qu'alors la mesure $\vec{\mu}$ est prolongeable. Fixons un intervalle $(r,s\rangle$ et une de ses décompositions en des intervalles disjoints

$$(r,s\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (r_n, s_n\rangle.$$

Notre but est de démontrer l'inégalité

$$|\vec{\mu}(r,s\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(r_n, s_n\rangle.$$

Il existe un indice n_0 bien déterminé, tel que

$$s \underset{\text{df}}{=} s_{n_0}; \quad \text{posons} \quad r' \underset{\text{df}}{=} r_{n_0}.$$

Deux cas peuvent se présenter:

$$1^0 \quad r < r' < s, \qquad 2^0 \quad r = r' < s.$$

Considérons d'abord le cas 1^0:

(1) $$r < r' < s.$$

Soit $r_n \leqslant r'$. L'intervalle $(r_n, s\rangle$ est égal à la somme au plus dénombrable de différents intervalles contenus dans la suite:

(2) $$(r_1, s_1\rangle, \; (r_2, s_2\rangle, \ldots, (r_m, s_m\rangle, \ldots,$$

soit:

$$(r_n, s\rangle = \sum_{\alpha} (r_{n_\alpha}, s_{n_\alpha}\rangle.$$

Dans le cas, où $r_n = r'$, on a évidemment

$$|\vec{\mu}(r_n, s\rangle| \leqslant \sum_{\alpha} \mu^*(r_{n_\alpha}, s_{n_\alpha}\rangle,$$

parce que cette relation se réduit à

$$|\vec{\mu}(r_n, s_n\rangle| \leqslant \mu^*(r_n, s_n\rangle,$$

et cette inégalité est évidente.

Désignons par r'' la borne inférieure de tous les r_n, pour lesquels

(3) $$|\vec{\mu}(r_n, s\rangle| \leqslant \sum_{\alpha} \mu^*(r_{n_\alpha}, s_{n_\alpha}\rangle.$$

Choisissons une suite infinie:

$$r_{m_1} \geqslant r_{m_2} \geqslant \ldots \geqslant r''$$

parmi les nombres r_{n_α}, de manière qu'on ait

$$\lim_{k\to\infty} r_{m_k} = r''.$$

Nous avons

(4) $$|\vec{\mu}(r_{m_k}, s\rangle| \leqslant \sum_{\beta} \mu^*(r_{n_\beta}, s_{n_\beta}\rangle,$$

la sommation étant étendue à tous les intervalles (2) qui ce trouvent dans $(r_{m_k}, s\rangle$.

A fortiori

(5) $$|\vec{\mu}(r_{m_k}, s\rangle| \leqslant \sum_{\gamma} \mu^*(r_{n_\gamma}, s_{n_\gamma}\rangle,$$

où la sommation embrasse tous les intervalles figurant dans toutes les sommes (4), $(k=1,2,\ldots)$.

Comme

$$\vec{\mu}(r_{m_k}, s\rangle = \vec{\varrho}(s) - \vec{\varrho}(r_{m_k})$$

et comme, en vertu de l'hypothèse,

$$\lim_{k} \vec{\varrho}(r_{m_k}) = \vec{\varrho}(r''),$$

on déduit de (5):

(6) $$|\vec{\mu}(r'', s\rangle| \leqslant \sum_{\gamma} \mu^*(r_{n_\gamma}, s_{n_\gamma}\rangle.$$

Nous allons prouver que $r'' = r$. Supposons le contraire: $r'' > r$. Les intervalles (2) étant disjoints et leur somme étant égale à $(r, s\rangle$, il existe un intervalle (2) bien déterminé, soit $(r_p, s_p\rangle$, tel que

$$r'' = s_p.$$

On a, en vertu de l'additivité de la mesure μ:

$$\mu(r_p, s\rangle = \mu(r_p, s_p\rangle + \mu(r'', s\rangle,$$

d'où

$$|\mu(r_p, s\rangle| \leqslant \mu^*(r_p, s_p\rangle + \sum_{\gamma} \mu^*(r_{n_\gamma}, s_{n_\gamma}\rangle.$$

Mais l'intervalle $(r_p, s_p\rangle$ ne se trouve pas parmi les intervalles $(r_{n_\gamma}, s_{n_\gamma}\rangle$ et, de plus, nous avons

$$(r_p, s\rangle = (r_p, s_p\rangle + \sum_{\gamma} (r_{n_\gamma}, s_{n_\gamma}\rangle.$$

Par conséquent, r'' n'est pas la borne inférieure en question.

Nous avons ainsi démontré que $r'' = r$. L'inégalité (6) peut s'écrire alors:

$$(7) \qquad |\mu(r, s\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(r_n, s_n\rangle,$$

où la sommation embrasse tous les intervalles (2).

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le cas 1°, où $r<r'<s$; mais on voit que dans le second cas: $r=r'<s$ l'inégalité (7) est évidente.

Nous avons ainsi démontré que l'inégalité (7) subsiste dans toute sa généralité.

Il en résulte, d'après le théorème cité, que la mesure peut être prolongée de manière qu'elle devienne une mesure vectorielle parfaitement additive et définie pour tous les ensembles boréliens contenus dans $(-\infty, +\infty\rangle$.

10. Le résultat qui vient d'être établi peut être formulé de la manière suivante.

Théorème. *Soit $\vec{\varrho}(x)$ une fonction définie dans $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ et dont les valeurs sont des vecteurs d'un espace (R) de* M. Banach.

Supposons que (R) jouit de la propriété suivante:

(a) *Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ est une suite infinie de vecteurs de (R), telle que pour chaque suite partielle $\{\vec{x}_{k_n}\}$ la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_{k_n}$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |\vec{x}_n| < \infty$.*

Soit $\vec{\mu}(E)$ une fonction d'ensemble E telle que ces valeurs sont des vecteurs de (R).

Supposons qu'elle soit définie dans le plus petit sémi-corps contenant tous les intervalles $(a,b\rangle$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, qu'elle soit additive (simplement) et qu'on ait

$$\vec{\mu}\{(a,b\rangle\} = \vec{\varrho}(b) - \vec{\varrho}(a).$$

Ces hypothèses admises, la condition nécessaire et suffisante afin que la fonction $\vec{\mu}(E)$ puisse être prolongée de manière qu'elle soit définie pour tout sous-ensemble borélien de $(-\infty,+\infty\rangle$ et y sera parfaitement additive est que

1⁰ $\lim\limits_{\substack{x_n > x_0 \\ x_n \to x_0}} \vec{\varrho}(x_n) = \vec{\varrho}(x_0)$ *pour chaque x_0, où $-\infty \leqslant x_0 < +\infty$,*

2⁰ $\vec{\varrho}(x)$ *soit à variation bornée dans $\langle -\infty, +\infty\rangle$,* ce qui veut dire, par définition, qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour chaque système fini d'intervalles $(a_i, b_i\rangle$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(n \geqslant 1)$, disjoints deux-à-deux, on ait

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\vec{\varrho}(b_i) - \vec{\varrho}(a_i)| \leqslant M.$$

11. Appliquons le théorème démontré aux intégrales de Stieltjes. Supposons que l'espace vectoriel (R) coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels ou complexes. Soit $\varrho(x)$ une fonction définie dans $\langle -\infty, +\infty\rangle$, partout continue du côté droit et supposons que $\varrho(x)$ soit à variation bornée dans $\langle -\infty, +\infty\rangle$. Considérons les intégrales de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\, d\varrho(x),$$

où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et où $f(x)$ est continue et bornée dans $\langle -\infty, +\infty\rangle$.

Soit $\mu(E)$ la mesure parfaitement additive provenant, par prolongation, de la fonction

$$\mu\{(a,b\rangle\} \underset{\mathrm{df}}{=} \varrho(b) - \varrho(a).$$

D'après le théorème démontré une telle mesure existe Considérons l'intégrale de MM. RADON-FRÉCHET

$$V(E) \overline{\overline{\text{df}}} \int_E f(x)\, d\mu_x$$

relative à la fonction mesurante $\mu(E)$ [1]).

On voit aisément, que

$$\int_{(a,b\rangle} f(x)\, d\mu_x = \int_a^b f(x)\, d\varrho(x)$$

et, par conséquent, que l'intégrale de MM. RADON-FRÉCHET représente une généralisation naturelle (une prolongation) de l'intégrale de STIELTJES de la même manière que l'intégrale de M. LEBESGUE généralise l'intégrale de RIEMANN. Voici donc, pourquoi il est commode d'admettre — comme on le fait d'habitude — que $\varrho(x)$ est continue partout d'un côté (p. ex. du côté droit). De plus, on voit qu'il est bien commode de considérer des intervalles sémifermés $(a,b\rangle$ au lieu des intervalles ouverts ou fermés.

Les remarques que nous venons de faire, permettent de considérer les intégrales de STIELTJES figurant chez M. STONE [2]) dans la représentation spectrale des opérations „selfadjoint"s dans l'espace de HILBERT-HERMITE:

$$(Hf,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E_\lambda f,g), \qquad (f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(E_\lambda f,g),$$

$$|Hf|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d|E_\lambda f|^2, \qquad |f|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d|E_\lambda f|^2$$

comme les intégrales de MM. RADON-FRÉCHET, ce qui semble être plus avantageux parce qu'on en obtient des formules analogues où les intégrales sont prises sur n'importe quel ensemble borélien [3]).

---

1) Elle se définit précisément de la même manière que l'intégrale de M. Lebesgue, la seule différence étant telle qu'au lieu de la mesure ordinaire on envisage la fonction $\mu(E)$.

2) Voir [5], p. 180 ff.

3) J'y reviens dans un travail spécial.

OEUVRES CITÉS

1. J. **Radon**. *Theorie u. Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*. Sitzb. d. Math.-Naturwiss. Kl. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien (1913). Bd. 112. Abt. IIa/2.

2. M. **Fréchet**. *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*. Bull. de la Soc. Math. de France (1915). t. XLIII, pp. 248-265.

3. O. **Nikodym**. *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*. Fund. Math. t. XV. (1929), pp. 131-179.

4. O. **Nikodym**. *Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole*. Mémoires de l'Acad. roy. de Belgique (Cl. des Sc.) tome XVII. (1938).

5. M. H. **Stone**. *Linear transformations in Hilbert space*. New-York (1932).

6. S. **Banach**. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits, etc.* Fund. Math. III. (1922).

SUR LES BASES DU GROUPE SYMÉTRIQUE ET DU GROUPE ALTERNANT

Par SOPHIE PICCARD, Neuchâtel

1. Quel que soit le nombre entier $n \geqslant 3$ ($\geqslant 4$), le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'ordre $n!$ (le groupe alternant $\mathfrak{A}_n$ d'ordre $n!/2$) peut, comme on sait, être engendré par deux de ses substitutions. Nous appellons *base* du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ tout couple de substitutions génératrices de ce groupe.

Nous avons démontré que le nombre total de bases du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ est un multiple de $n!/2$ ($n!/4$). D'autre part, quelle que soit la substitution non identique S de $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, il existe au moins une substitution T de $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ qui forme avec S une base de $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, à l'exception des trois substitutions $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$ qui ne font partie d'aucune base du groupe $\mathfrak{S}_4$. Nous avons établi le système complet de bases du groupe $\mathfrak{S}_n$, pour $n = 3, 4, 5$ et 6. Enfin, nous avons trouvé divers critères généraux permettant de discerner les bases du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$.

Le but de la présente Note est d'établir plusieurs critères permettant de discerner toutes les bases du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, $n \geqslant 9$, dont l'une des substitutions est de la forme $(a\ b\ c\ d\ e)$, a, b, c, d, e désignant cinq nombres distincts quelconques de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$.

2. Pour traiter ce problème, nous nous appuyerons sur plusieurs lemmes et propositions que nous avons établis ailleurs [1]), ainsi que sur sur un groupe de six lemmes nouveaux. Voici quelques résultats antérieurement acquis:

Lemme 1. *Quels que soient le nombre pair (impair) $n \geqslant 4$ ainsi que les r ($2 < r \leqslant n$) nombres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont a_1 est le plus petit, si le plus grand commun diviseur*

---

[1]) Wiadomości Matematyczne, t. XLVII.

$D(a_2-a_1, a_3-a_1, \ldots, a_r-a_1, n)$ des r nombres $a_2-a_1, a_3-a_1, \ldots, a_r-a_1, n$ est $=1$, en composant la substitution $S=(1\ 2\ \ldots\ n)$ avec le groupe alternant des substitutions des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_r$, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$.

Lemme 2. *En composant un nombre quelconque $k \geqslant 1$ de substitutions de la forme $T_i=(a_i b_i c_i)$, $(i=1,2,\ldots,k)$, telles que, quel que soit l'indice $i=1,2,\ldots,k-1$, l'ensemble*

$$\{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_i, b_i, c_i\} \cdot \{a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}\} \neq 0,$$

on obtient le groupe alternant des substitutions de tous les éléments qui figurent dans les divers T_i.

Lemme 3. *Quels que soient le nombre entier $n>3$ et les nombres distincts a_1, a_2, a_3 de la suite $1,2,\ldots,n$, $(a_1<a_2,\ a_1<a_3)$, si l'on pose $D(a_2-a_1, a_3-a_1, n)=k$, la substitution $(a_1\, a_1+k\ a_1+2k)$ peut être obtenue en composant les deux substitutions $S=(1\ 2\ \ldots\ n)$ et $T=(a_1 a_2 a_3)$.*

Proposition 1. Quels que soient les nombres entiers $k>1$, $i(1 \leqslant i \leqslant k)$ et $n>i$, les deux substitutions $S=(1\ 2\ \ldots\ k)$, $T=(i\, i+1\ \ldots\ n)$, si elles ne sont pas identiques, engendrent le groupe $\mathfrak{S}_{\max.(k,n)}$ ou $\mathfrak{A}_{\max.(k,n)}$, aux trois exceptions suivantes près: $S_1=(1\,2\,3\,4)$, $T_1=(3\,4\,5\,6)$; $S_2=(1\,2\,3\,4)$, $T_2=(2\,3\,4\,5\,6)$; $S_3=(1\,2\,3\,4\,5)$, $T_3=(3\,4\,5\,6)$.

Proposition 2. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 3$, $m(1 \leqslant m < n)$ et les trois nombres a,b,c de la suite $1,2,\ldots,n$, dont l'un au moins est $<m$ et l'un au moins est $>m$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme $S=(1\ 2 \ldots m)(m+1 \ldots n)$, $T=(a\ b\ c)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, si n est impair (pair), c'est que $D(m, n-m, d)=1$, d désignant la valeur absolue de la différence des deux nombres du système a,b,c qui appartiennent au même cycle de S.

3. Lemmes nouveaux.

Lemme I. *Quels que soient les deux ensembles $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ et $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ ayant au moins un élément commun, les deux substitutions $S=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$, $T=(b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5)$ engendrent toujours le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, si T n'est pas une itérée de S ni une itérée de la*

substitution $(a_{i+1} a_i a_{i+3} a_{i+2} a_6)$, $(i=1,2,3,4,5,\ a_6 \bar{\epsilon} \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, *les nombres* $i+1$, $i+2$, $i+3$ *devant être réduits mod.* 5).

Pour ne pas allonger la présente Note, nous omettons la démonstration de ce lemme qui ne présente aucune difficulté.

Lemme II. *Quels que soient les nombres entiers* $n \geqslant 5$, $m(1<m<n)$ *et les cinq nombres entiers* a, b, c, d, e *vérifiant les relations* $1 \leqslant a<b \leqslant m$, $m+1 \leqslant c<d<e \leqslant n$ *et*

*) $$D(m, n-m, b-a, d-c, e-c)=1,$$

en composant la substitution $S=(1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$ *avec le groupe alternant* G *des substitutions des éléments* a, b, c, d, e, *on obtient le groupe* $\mathfrak{S}_n$, *si* n *est impair, ou le groupe* $\mathfrak{A}_n$, *si* n *est pair.*

Démonstration. Si l'un au moins des trois nombres $D(m, n-m, b-a)$, $D(m, n-m, d-c)$, $D(m, n-m, e-c)$ est égal à 1, comme les trois substitutions $(a\ b\ c)$, $(a\ c\ d)$, $(a\ c\ e)$ appartiennent au groupe G, le lemme II découle alors de la proposition 2. Supposons que les trois nombres en question sont >1.

Soit $D(m, b-a)=k'$, $D(n-m, d-c, e-c)=k''$.

D'après *) $D(k', k'')=1$.

La substitution $T=(a\ b\ c)$ fait partie du groupe G.

Je dis qu'en composant les deux substitutions S et T, on peut obtenir la substitution $P=(a\ a+k'\ c)$. En effet, c'est évident si $b-a=k'$. Alors $P=T$. Supposons que $b-a>k'$. Soit $m=m'k'$, $b-a=t'k'$, $(t'>1)$. On a $D(m', t')=1$.

Il existe donc un nombre entier s, tel que $t's \equiv 1 \pmod{m'}$ et, par conséquent, il existe un nombre entier r, tel que $t's=rm'+1$. Multiplions les deux membres de cette égalité par k'. Il vient $s(b-a)=rm+k'$, autrement dit $s(b-a) \equiv k' \pmod{m}$.

Soit s le plus petit nombre entier >0 vérifiant cette congruence. Envisageons la suite des substitutions

$$T, T_1=S^{b-a} T S^{-(b-a)}=(b\, b_1 c_1), \quad T_2=S^{2(b-a)} T S^{-2(b-a)}=(b_1 b_2 c_2), \ldots,$$
$$T_{s-1}=S^{(s-1)(b-a)} T S^{-(s-1)(b-a)}=(b_{s-2} b_{s-1} c_{s-1}).$$

On a $b_{s-1}=a+k'$.

D'après le lemme 2, en composant les substitutions $T, T_1, \ldots, T_{s-1}$, on obtient le groupe alternant des substitutions de tous les éléments qui sont permutés par $T, T_1, \ldots, T_{s-1}$, et ce groupe contient la substitution $P=(a\ a+k'\ c)$.

D'autre part, le groupe G contient la substitution $(c\ d\ e)$ et on voit sans peine[1]), en s'appuyant sur les lemmes 2 et 3, que la substitution $Q=(c\ c+k''\ c+2k'')$ peut être obtenue en composant les deux substitutions S et (cde).

Comme $D(k',k'')=1$, il existe un nombre entier u, tel que $uk'\equiv 1$ (mod. k''). Autrement dit, il existe un nombre entier v, tel que $uk'=vk''+1$. Envisageons la suite des substitutions

$$Q_{v-2}=S^{(v-2)k''}QS^{-(v-2)k''}=(c+(v-2)k''\ c+(v-1)k''\ c+vk''),$$
$$Q_{v-3}=S^{(v-3)k''}QS^{-(v-3)k''}=(c+(v-3)k''\ c+(v-2)k''\ c+(v-1)k''),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Q=(c\ c+k''\ c+2k''),$$
$$P=(a\ a+k'\ c),$$
$$P_1=S^{k'}TS^{-k'}=(a+k'\ a+2k'\ c+k'),$$
$$P_2=S^{2k'}TS^{-2k'}=(a+2k'\ a+3k'\ c+2k'),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_u=S^{uk'}TS^{-uk'}=(a+uk'\ a+(u+1)k'\ c+uk'),$$

les nombres $a+i$ devant être réduits mod. m et les nombres $c+j$ devant être réduits mod. $n-m$, de façon à être compris au sens large entre $m+1$ et n.

D'après le lemme 2, en composant ces diverses substitutions, on obtient le groupe alternant des substitutions de tous les éléments qu'elles permutent. Or, ce groupe contient la substitution $(a\ c+vk''\ c+uk')=(a\ c+vk''\ c+vk''+1)$, les nombres $c+vk''$ et $c+vk''+1$ devant être réduits mod. $n-m$, comme indiqué ci-dessus. Or, cette dernière substitution engendre avec S, d'après la proposition 2, le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est impair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est pair, d'où résulte immédiatement le lemme II.

Lemme III. Quels que soient les nombres entiers $n\geqslant 5$, $m(1\leqslant m<n)$ et les cinq nombres entiers a,b,c,d,e vérifiant les relations $1\leqslant a<m, m+1\leqslant b<c<d<e\leqslant n$, $D(m,n-m,c-b,d-b,e-b)=1$, en composant la substitution $S=(1\ 2\ \dots\ m)(m+1\ \dots\ n)$ avec le groupe alternant G des substitutions des éléments a,b,c,d,e, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est impair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est pair.

---

[1]) Voir la démonstration des lemmes 9 et 10 dans notre travail cité de Wiadomości Matematyczne.

Démonstration. La substitution $T=(a\,b\,c\,d\,e)$ fait partie du groupe G et on a $ST=(a\,b+1\ldots c\,d+1\ldots e\,a+1\ldots m\,1\,2\ldots \ldots a-1)(b\,c+1\ldots d\,e+1\ldots n\,m+1\ldots b-1)$.

Il est clair que la substitution ST engendre, avec les substitutions du groupe G, le même groupe que la substitution S. Posons

$$U=\begin{pmatrix} a & b+1 & \ldots & c & \ldots & e & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots & 1+c-b & \ldots & 1+c-b+e-d & \ldots \end{pmatrix.$$
$$\begin{pmatrix} \ldots & a-1 & b & \ldots & d & \ldots & b-1 \\ \ldots & c-b+e-d+m & 1+c-b+e-d+m & \ldots & 1+e-b+m & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$USTU^{-1}=R=(1\,2\ldots c-b+e-d+m)(1+c-b+e-d+m\ldots n),$$
$$UGU^{-1}=G_1,$$

G_1 désignant le groupe alternant des substitutions des éléments $1,\ 1+c-b,\ 1+c-b+e-d,\ 1+c-b+e-d+m,\ 1+e-b+m$. Les trois premiers de ces éléments appartiennent au premier et les deux derniers, au second cycle de R, et comme $D(c-b, c-b+e-d, d-c, c-b+e-d+m, n-(c-b+e-d+m))= =D(m, n-m, c-b, d-b, e-b)=1$, il résulte du lemme II qu'en composant R avec les substitutions du groupe G_1, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est impair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est pair. Il en résulte immédiatement le lemme III.

Lemme IV. Quels que soient les nombres entiers $n\geqslant 5, l, m$ $(1\leqslant l<m<n)$ insi que les cinq nombres entiers a,b,c,d,e vérifiant les relations $1\leqslant a\leqslant l$, $l+1\leqslant b<c\leqslant m$, $m+1\leqslant d<e\leqslant n$, $D(l, m-l, n-m, c-b, e-d)=1$, en composant la substitution $S=(1\,2\ldots l)(l+1\ldots m)(m+1\ldots n)$ avec le groupe alternant G des substitutions des éléments a,b,c,d,e on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair.

Démonstration. La substitution $(a\,b\,d)$ fait partie du groupe G et on a $ST=(a\,b+1\,b+2\ldots c\,c+1\ldots m\,l+1\,l+2\ldots b\ d+1\,d+2\ldots e\,e+1\ldots n\,m+1\ldots d\,a+1\ldots l\,1\,2\ldots a-1)$.

Posons

$$U=\begin{pmatrix} a & b+1 & \ldots & c & \ldots & b & \ldots & e & \ldots & d & \ldots a-1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1+c-b & \ldots & 1+m-l & \ldots & 1+m-l+e-d & \ldots & 1+n-l & \ldots n \end{pmatrix}.$$

Il vient $USTU^{-1}=R=(1\ 2 \dots n)$.

Soit $UGU^{-1}=G_1$. G_1 est le groupe alternant des substitutions des éléments $1, 1+c-b, 1+m-l, 1+m-l+e-d, 1+n-l$.

La substitution R composée avec les substitutions de G_1 engendre un groupe isomorphe à celui que ST engendre avec les substitutions de G. Et comme $D(c-b, m-l, m-l+e-d, n-l, n)=$ $=D(l, m-l, n-m, c-b, e-d)=1$, il résulte du lemme 1, que R engendre avec les substitutions de G_1 le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il en est donc de même de S et des substitutions de G, c. q. f. d.

Lemme V. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 5$, $l, m\ (1 \leqslant l < m < n)$ *ainsi que les cinq nombres entiers* a, b, c, d, e *vérifiant les relations* $1 \leqslant a \leqslant l$, $l+1 \leqslant b \leqslant m$, $m+1 \leqslant c < d < e \leqslant n$, $D(l, m-l, n-m, d-c, e-c)=1$, *en composant la substitution* $S=(1\ 2 \dots l)(l+1 \dots m)(m+1 \dots n)$ *avec le groupe alternant* G *des substitutions des éléments* a, b, c, d, e, *on obtient le groupe* $\mathfrak{S}_n$, *si* n *est pair, ou* $\mathfrak{A}_n$, *si* n *est impair.*

Démonstration. La substitution $(a\ b\ c)$ appartient au groupe G et on a $ST=(a\ b+1 \dots m\ l+1 \dots b\ c+1 \dots d\ d+1 \dots e$ $e+1 \dots n\ m+1 \dots c\ a+1 \dots l\ 1\ 2 \dots a-1)$.

Posons

$$U=\begin{pmatrix} a & b+1 & \dots & b & \dots & d & \dots & e & \dots & c & \dots a-1 \\ 1 & 2 & \dots & 1+m-l & \dots & 1+m-l+d-c & \dots & 1+m-l+e-c & \dots & 1+n-l & \dots\ n \end{pmatrix}.$$

On a $USTU^{-1}=R=(1\ 2 \dots n)$,

$UGU^{-1}=G_1$,

G_1 désignant le groupe alternant des substitutions des éléments $1, 1+m-l, 1+m-l+d-c, 1+m-l+e-c, 1+n-l$, et comme

$$D(m-l, m-l+d-c, m-l+e-c, n-l, n)= \\ =D(l, m-l, n-m, d-c, e-c)=1,$$

d'après le lemme 1, la substitution R engendre avec les substitutions du groupe G_1 le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, d'où résulte immédiatement notre lemme.

Lemme VI. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 5$, k, l, m $(1 \leqslant k < l < m < n)$ *ainsi que les cinq nombres entiers* a, b, c, d, e *vérifiant les relations*

$$1 \leqslant a \leqslant k, \quad k+1 \leqslant b \leqslant l, \quad l+1 \leqslant c \leqslant m, \quad m+1 \leqslant d < e \leqslant n,$$
$$D(k, l-k, m-l, n-m, e-d)=1,$$

en composant la substitution

$$S=(1\ 2\ \ldots\ k)(k+1\ \ldots\ l)(l+1\ \ldots\ m)(m+1\ \ldots\ n)$$

avec le groupe alternant G *des substitutions des éléments* a, b, c, d, e, *on obtient le groupe* $\mathfrak{S}_n$, *si* n *est impair, ou* $\mathfrak{A}_n$, *si* n *est pair.*

Démonstration. La substitution $T=(a\ b\ c)$ appartient au groupe G, et on a $ST=(a\ b+1 \ldots l\ k+1 \ldots b\ c+1 \ldots m\ l+1 \ldots$ $\ldots c\ a+1 \ldots k\ 1\ 2 \ldots a-1)\ (m+1\ \ldots\ n)$.

La substitution ST engendre avec les substitutions de G le même groupe que S. Posons

$$U=\begin{pmatrix} a\ b+1 \ldots & b & \ldots & c & \ldots a-1 & m+1 \ldots n \\ 1\ \ 2 & \ldots 1+l-k & \ldots & 1+m-k \ldots & m & m+1 \ldots n \end{pmatrix}.$$

On a $U\,S\,T\,U^{-1}=R=(1\ 2\ \ldots\ m)(m+1\ \ldots\ n)$ et le groupe $U\,G\,U^{-1}=G_1$ est le groupe alternant des substitutions des éléments $1, 1+l-k, 1+m-k, d, e$. Et comme

$$D(l-k, m-k, m, n-m, e-d)=D(k, l-k, m-l, n-m, e-d)=1,$$

d'après le lemme II, en composant la substitution R avec les substitutions de G_1, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, d'où résulte notre dernier lemme.

4. Notations. Quels que soient la substitution non identique S du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ de la forme $(1\ 2 \ldots m_1)(m_1+1\ m_1+2 \ldots m_2) \ldots$ $\ldots (m_{r-1}+1 \ldots m_r)$, $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_{r-1} < m_r = n$, $1 \leqslant r < n$, le cycle C d'ordre $k>1$ de S et les deux éléments a, b faisant partie de ce cycle, nous appelons distance entre ces deux éléments et nous désignons par le symbôle $\overline{ab}$ le plus petit nombre entier positif, tel que $a+\overline{ab} \equiv b$ (mod. k). On a évidemment $1 \leqslant \overline{ab} < k$ et $\overline{ab}+\overline{ba}=k$.

Proposition I. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 9$ et les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite $1, 2, \ldots, n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S=(1\ 2\ \ldots\ n)$, $T=(a\ b\ c\ d\ e)$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair, c'est que

$$D(\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{ad}, \overline{ae}, n)=1.$$

Démonstration. On voit immédiatement que si la condition énoncée n'est pas vérifiée, les substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif et ne sauraient de ce fait constituer une base ni de $\mathfrak{S}_n$ ni de $\mathfrak{A}_n$. La condition est donc bien nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit

*) $$D(\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{ad}, \overline{ae}, n)=1.$$

Nous pouvons toujours choisir les notations de façon que a soit le plus petit des cinq nombres a, b, c, d, e. Il y a alors 24 cas possibles quant à l'ordre de grandeur des nombres a, b, c, d, e, mais il suffit de traiter seulement deux de ces cas: I) $a<b<c<d<e$ et II) $a<b<c<e<d$, car tous les autres cas se ramènent à ces deux soit par itération de T soit par transformation de T au moyen de la substitution S.

I. Supposons d'abord que $a<b<c<d\leq e$.

Posons $\overline{ab}=k_1$, $\overline{bc}=k_2$, $\overline{cd}=k_3$, $\overline{de}=k_4$, $\overline{ea}=k_5$.

On a $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=n$.

Les cas suivants sont alors à distinguer.

1. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a un qui est plus petit que les quatre autres. Soit, p. ex. k_1 ce nombre.

On a $T_1=S^{k_1}TS^{-k_1}=(b\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1)$, où b_1, c_1, d_1, e_1 sont quatre nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, différents de a, b, c, d, e. Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe alternant G des substitutions des éléments a, b, c, d, e. Donc, d'après *) et le lemme 1, en composant S avec les substitutions de G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il s'ensuit que S, T et bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ dans le cas considéré.

2. Supposons maintenant que parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a deux qui sont égaux entre eux et plus petits que les trois autres. Soit k la valeur commune des deux plus petits nombres. On a $T_1=S^kTS^{-k}=(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1)$, où a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont cinq nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux appartiennent à la suite a, b, c, d, e. D'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. On en conclut, comme ci-dessus, que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

3. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a trois qui sont égaux entre eux et plus petits que les deux autres. Soit k la valeur commune des trois plus petits nombres en question. On a

$$T_1 = S^k T S^{-k} = (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1),$$

où a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont cinq nombres de la suite $1, 2, ..., n$, dont trois font parti de la suite a, b, c, d, e. Donc, d'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

4. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, il y en a quatre qui sont égaux entre eux et plus petits que le 5-me. Soit, p. ex., $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 < k_5$. On a alors $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ d\ e\ e_1)$, où e_1 est un nombre de la suite $1, 2, ..., n$, différent de a. Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après la proposition 1, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

De *) et de la condition $n \geqslant 9$, il résulte que l'on ne saurait avoir $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5$. Notre proposition est ainsi démontrée dans le cas I.

II. Soit $a < b < c < e < d$.

Posons $\overline{ab} = k_1$, $\overline{bc} = k_2$, $\overline{cd} = k_3$, $\overline{ed} = k_4$, $\overline{ea} = k_5$.

On a $k_1 + k_2 + k_3 - k_4 + k_5 = n$, $k_4 < k_3$ et $k_4 < k_5$.

Ici il y a lieu de distinguer trois cas.

1. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a un qui est plus petit que les autres. Cela ne peut être que l'un des trois nombres k_1, k_2, k_4. Soit k_1 ce nombre. Posons $T = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1)$.

Les cas suivants peuvent alors se présenter:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & c + k_1 \neq e, \quad d + k_1 \neq a + n, \\ \text{b)} & c + k_1 = e, \quad d + k_1 \neq a + n, \\ \text{c)} & c + k_1 \neq e, \quad d + k_1 = a + n, \\ \text{d)} & c + k_1 = e, \quad d + k_1 = a + n. \end{array}$$

Dans le cas a) aucun des éléments b_1, c_1, d_1, e_1 n'appartient à la suite a, c, d, e, dans les cas b) et c) un seul élément parmi b_1, c_1, d_1, e_1 appartient à la suite a, c, d, e et, dans le cas d), deux éléments parmi b_1, c_1, d_1, e_1 font partie du système a, c, d, e. Dans

tous les cas, d'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. D'où il résulte, d'après *) et le lemme 1, que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$. Les cas où k_2, respectivement k_4, est le plus petit des cinq nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 se traitent de façon tout à fait analogue.

2. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a deux égaux entre eux et plus petits que les trois autres.

Trois cas sont alors possibles:

$$\text{a)}\ k_1 = k_2 \left\langle \begin{matrix} k_3 \\ k_4, \\ k_5 \end{matrix} \right. \qquad \text{b)}\ k_1 = k_4 \left\langle \begin{matrix} k_2 \\ k_3, \\ k_5 \end{matrix} \right. \qquad \text{c)}\ k_2 = k_4 \left\langle \begin{matrix} k_1 \\ k_3. \\ k_5 \end{matrix} \right.$$

Envisageons d'abord le cas a).

On a $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ c_1\ d_1\ e_1)$. Il peut arriver que

$$\begin{aligned} & c + k_1 \neq e, \quad d + k_1 \neq a + n, \\ \text{ou}\ & c + k_1 = e, \quad d + k_1 \neq a + n, \\ \text{ou}\ & c + k_1 \neq e, \quad d + k_1 = a + n, \\ \text{ou}\ & c + k_1 = e, \quad d + k_1 = a + n. \end{aligned}$$

Dans les quatre cas, $e + k_1 \neq d$.

Dans les trois premiers cas, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'après le lemme I, d'où il s'ensuit, d'après la condition *) et le lemme 1, que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$. La raisonnement précédent ne s'applique plus dans le 4me cas. On a alors $k_1 = k_2 = \overline{ce} = \overline{da} < k_4$, $k_3 = k_5 = k_1 + k_4$. Soit $k_1 = 1$; comme nous avons supposé $n \geqslant 9$, on a alors $k_4 \geqslant 5$. Dans ce cas, $T = (a\ a+1\ a+2\ d\ a+3)$, $S^4 T S^{-4} = T_2 = (a+4\ a+5\ a+6\ a+3\ a+7)$ et les deux substitutions T et T_2 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. On en déduit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons maintenant que $k_1 > 1$. Alors, d'après la condition *), k_1 et k_4 sont premiers entre eux. Donc, si l'on pose $T_3 = S^{k_4} T S^{-k_4} = (a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ d)$, les nombres a_1, b_1, c_1, d_1 ne font pas partie du système a, b, c, e. Par conséquent, d'après le lemme I, T et T_3 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Passons maintenant au cas b). Posons $T_1=S^{k_1}TS^{-k_1}=$ $=(b\,b_1\,c_1\,d_1\,d)$. Les cas suivants sont possibles:

$$c+k_1\neq e,\ d+k_1\neq a+n,$$
$$c+k_1=e,\ d+k_1\neq a+n,$$
$$c+k_1\neq e,\ d+k_1=a+n,$$
$$c+k_1=e,\ d+k_1=a+n.$$

Dans tous ces cas, $b+k_1=b_1\neq c$.

Dans les quatre cas, T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Le cas c) se traite de façon tout à fait analogue au cas b).

3. Parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a trois qui sont égaux entre eux et plus petits que les deux autres.

On a alors forcément $k_1=k_2=k_4<{k_3 \atop k_5}$.

Posons $T_1=S^{k_1}TS^{-k_1}=(b\,c\,c_1\,d_1\,d)$.

Les cas suivants sont alors possibles:

$$c+k_1\neq e,\ d+k_1\neq a+n,$$
$$c+k_1=e,\ d+k_1\neq a+n,$$
$$c+k_1\neq e,\ d+k_1=a+n.$$

Comme $n\geqslant 9$, d'après la relation *), on ne saurait avoir $c+k_1=e$ et en même temps $d+k_1=a+n$.

Dans les trois cas possibles, T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Nous avons ainsi épuisé tous les cas possibles et la proposition est démontrée.

Corollaire. *Quels que soient les nombres entiers* $n\geqslant 9$, $m_1\geqslant 1$, $m_2\geqslant 1$, $m_3\geqslant 1$, $m_4\geqslant 1$, $m_5\geqslant 1$ $(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=n)$, *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions* $S=(1\,2\ldots n)$, $T=(1\,2\ldots m_1)(m_1+1\ldots m_1+m_2)(m_1+m_2+1\ldots m_1+$ $+m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3+1\ldots m_1+m_2+m_3+m_4)(m_1+m_2+m_3+$ $+m_4+1\ldots m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)$ *constituent une base du groupe* $\mathfrak{S}_n$, *si* n *est pair, ou du groupe* $\mathfrak{A}_n$, *si* n *est impair, c'est que* $D(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)=1$.

Démonstration. On a

$$T^{-1}S=(m_1\, m_1+m_2\, m_1+m_2+m_3\, m_1+m_2+m_3+m_4\, m_1+m_2+m_3+m_4+m_5).$$

Les deux couples de substitutions S, T et S, $T^{-1}S$ engendrent le même groupe et, d'après la proposition I, la condition nécessaire et suffisante pour que $S, T^{-1}S$ soit une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$, c'est que

$$D(m_2, m_2+m_3, m_2+m_3+m_4, m_2+m_3+m_4+m_5, n)=1.$$

Or, $D(m_2, m_2+m_3, m_2+m_3+m_4, m_2+m_3+m_4+m_5, n)=$ $=D(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, ce qui démontre notre corollaire.

Proposition II. Quels que soient les nombres entiers $n\geqslant 9$, $m(1<m<n)$, ainsi que les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux sont $\leqslant m(>m)$ et trois sont $>m(\leqslant m)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions

$$S=(1\,2\ldots m)(m+1\ldots n),$$
$$T=(a\,b\,c\,d\,e)$$

engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est impair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est pair, c'est que $D(m, n-m, d_1, d_2, d_3)=1$, d_1 désignant la distance entre les deux éléments du système a, b, c, d, e qui sont $\leqslant m(>m)$ et d_2, d_3 désignant les distances de l'un des trois éléments du système a, b, c, d, e qui sont $>m(\leqslant m)$ aux deux autres.

Démonstration. Si la condition enoncée n'est pas vérifiée, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Cela ne saurait être ni le groupe $\mathfrak{S}_n$ ni le groupe $\mathfrak{A}_n$. La condition est donc bien nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit

*) $$D(m, n-m, d_1, d_2, d_3)=1.$$

Désignons par a_1, a_2 les deux éléments du système a, b, c, d, e qui font partie d'un même cycle de S et par a_3, a_4, a_5 $(a_3<a_4<a_5)$ les trois autres éléments du système a, b, c, d, e qui appartiennent au second cycle de S. Comme les deux couples de substitutions S, T et S, T^{-1} engendrent le même groupe, il suffit d'envisager le cas où les trois nombres a_3, a_4, a_5 se suivent par ordre de grandeur dans la suite a, b, c, d, e.

Posons $\overline{a_1a_2}=k_1$, $\overline{a_2a_1}=k_2$, $\overline{a_3a_4}=k_3$, $\overline{a_4a_5}=k_4$, $\overline{a_5a_3}=k_5$.

Si parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a un qui est plus petit que les quatre autres, ou deux égaux entre eux et plus petits que les trois autres ou encore trois égaux entre eux et plus petits que les deux autres, en désignant par k la valeur du plus petit ou des plus petits nombres en question, on a $T_1 = S^k T S^{-k} = (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1)$, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 désignant cinq nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$ dont un, deux ou au maximum trois font partie du système a, b, c, d, e. D'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe alternant G des substitutions des éléments a, b, c, d, e. D'après *) et le lemme II, en composant la substitution S avec les substitutions du groupe G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il en résulte que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons maintenant que parmi les nombres k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 il y en a quatre qui sont égaux entre eux et plus petits que le 5me. Désignons par k' la valeur de ce dernier nombre et soit k la valeur commune des quatre autres.

Si $k=1$, comme $n \geqslant 9$, on doit avoir $k' \geqslant 5$. Posons $T_1 = S^3 T S^{-3} = (a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$. Si k' est l'un des trois nombres k_1, k_2, k_3, deux éléments du système a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 font partie du système a, b, c, d, e. Leur nombre est égal à trois, si k' est l'un des nombres k_1, k_2. De toute façon, les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Si $k>1$, d'après *), k' est premier avec k. Posons $T_1 = S^{k'} T S^{-k'} = (a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$. Un seul des nombres a, b, c, d, e fait alors partie du système a, b, c, d, e. Donc, d'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'où il résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

D'après *) et comme $n \geqslant 9$, on ne saurait avoir $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Proposition III. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 9$, $m (1 \leqslant m < n)$ et les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite

$1, 2, \ldots, n$, dont un seul $a \leqslant m$ $(> m)$ et les quatre autres sont $> m$ $(\leqslant m)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)(m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d\ e)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, c'est que $D(m, n-m, \overline{bc}, \overline{bd}, \overline{be}) = 1$.

Démonstration. Pour prouver que la condition est nécessaire, il suffit de remarquer que si elle n'est pas satisfaite, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Montrons que la condition est suffisante. Soit

$$(*) \qquad D(m, n-m, \overline{bc}, \overline{bd}, \overline{be}) = 1.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $a \leqslant m$. Il y a alors 24 cas possibles, mais on voit sans peine qu'il suffit de traiter les deux cas suivants: I) $a<b<c<d<e$ et II) $a<b<c<e<d$, tous les autres cas pouvant se ramener à ces deux par itération de T ou par transformation de T au moyen de la substitution S.

Dans les deux cas I et II, on a $\overline{bc} = c-b$, $\overline{bd} = d-b$, $\overline{be} = e-b$.

Soit I) $a<b<c<d<e$.

Les deux couples de substitutions S, T et T, ST engendrent le même groupe. Or, $ST = R = (a\ b+1 \ldots c\ d+1 \ldots e\ a+1 \ldots m\ 1\ 2 \ldots$ $\ldots a-1)(b\ c+1 \ldots d\ e+1 \ldots n\ m+1 \ldots b-1)$.

Posons

$$U = \begin{pmatrix} a & b+1 \ldots & c & \ldots & e & \ldots \\ 1 & 2 \ \ldots & 1+c-b \ldots & & 1+c-b+e-d \ldots & \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \ldots & a-1 & b & \ldots & d & \ldots b-1 \\ \ldots c-b+e-d+m & 1+c-b+e-d+m \ldots & 1+e-b+m \ldots & & & n \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$URU^{-1} = R_1 = (1\ 2 \ldots c-b+e-d+m)(1+c-b+e-d+m \ldots n),$$
$$UTU^{-1} = (1\ 1+c-b+e-d+m\ 1+c-b\ 1+e-b+m\ 1+c-b+e-d) = T_1.$$

Les deux couples de substitutions R, T et R_1, T_1 engendrent des groupes simplement isomorphes et, d'après la proposition II, la condition nécessaire et suffisante pour que R_1, T_1 soit une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ c'est que

$$D(c-b+e-d+m, n-(c-b+e-d+m), c-b, c-b+e-d, d-c) = 1.$$

Or,

$$D(c-b+e-d+m, n-(c-b+e-d+m), c-b, c-b+e-d, d-c)= \\ =D(m, n-m, c-b, d-b, e-b)=1.$$

Notre proposition est ainsi établie dans le cas I.

Soit II) $a<b<c<e<d$. Ce cas ne se laisse pas ramener à la proposition II. Traitons le directement.

Posons $\overline{bc}=k_1$, $\overline{ce}=k_2$, $\overline{ed}=k_3$, $\overline{db}=k_4$.

Si parmi les nombres m, k_1, k_2, k_3, k_4 il y en a un plus petit que les quatre autres, ou s'il y en a deux égaux entre eux et plus petits que les trois autres ou encore s'il y en a trois égaux entre eux et plus petits que les deux autres, en désignant par k la valeur du plus petit ou des plus petits nombres du système a, b, c, d, e, on a

$$T_1=S^kTS^{-k}=(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1),$$

où a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont cinq nombres de la suite $1\,2 \ldots n$ dont un, deux ou trois au maximum font partie du système a, b, c, d, e. Donc, d'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Ce groupe contient le groupe alternant G des substitutions des éléments a, b, c, d, e et d'après le lemme III et la condition *), en composant S avec les substitutions du groupe G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il s'ensuit que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons maintenant que quatre des nombres m, k_1, k_2, k_3, k_4 sont égaux entre eux et plus petits que le 5me. Soit k la valeur commune des quatre plus petits nombres en question et soit k' le 5me nombre $>k$. Si $k=1$, comme $n \geqslant 9$, on a $k' \geqslant 5$. Alors, si $k'=m$, on a $T_1=S^4TS^{-4}=(a+4\ b\ c\ d\ e)$, et les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'après la proposition 1. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$. Si k' est l'un des quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4 on a $T_2=S^4TS^{-4}=(a\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1)$, où b_1, c_1, d_1, e_1 sont quatre nombres de la suite $m+1, m+2, \ldots, n$, différents de b, c, d, e. D'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Soit $k>1$. Alors, comme $D(m, n-m, \overline{bc}, \overline{bd}, \overline{be})=1= =D(m,k_1,k_2,k_3,k_4)$, les deux nombres k et k' sont premiers entre eux. Par conséquent la substitution $T_2=S^{k'}TS^{-k'}=(a_2b_2c_2d_2e_2)$, où a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 sont cinq nombres de la suite $1,2,...,n$, dont un seul appartient au système a,b,c,d,e. D'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S,T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

D'après la relation *), comme $n \geqslant 9$, on ne saurait avoir $m=k_1=k_2=k_3=k_4$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Proposition IV. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 9$, $l, m (1 \leqslant l < m < n)$ ainsi que les cinq nombres a,b,c,d,e de la suite $1,2,...,n$, dont un au moins appartient à chacun des trois intervalles $\langle 1,l \rangle$, $\langle l+1,m \rangle$, $\langle m+1,n \rangle$, et dont trois appartiennent à l'un de ces intervalles, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions

$$S=(1\ 2 \dots l)(l+1 \dots m)(m+1 \dots n), \quad T=(a\ b\ c\ d\ e)$$

engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair, c'est que $D(l, m-l, n-m, d_1, d_2)=1$, d_1 et d_2 désignant les distances de l'un des trois éléments du système a,b,c,d,e qui appartiennent à un même cycle de la substitution S aux deux autres.

Démonstration. On voit immédiatement que la condition est nécessaire, puisque, si elle n'est pas satisfaite, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Soit

*) $$D(l, m-l, n-m, d_1, d_2)=1.$$

Comme les deux couples de substitutions S,T et S,T^{-1} engendrent le même groupe, il suffit de traiter le cas où les trois éléments du système a,b,c,d,e qui font partie d'un même cycle de S se suivent dans l'ordre de leurs grandeurs croissantes dans la suite, a,b,c,d,e. Désignons par a_1, a_2, a_3 $(a_1<a_2<a_3)$ ces trois éléments et soient a_4, a_5 les deux éléments restants de la suite a,b,c,d,e. Supposons, pour fixer les idées, que les trois nombres a_1, a_2, a_3 appartiennent à l'intervalle $\langle m+1,n \rangle$.

Posons $\overline{a_1a_2}=k_1$, $\overline{a_2a_3}=k_2$, $\overline{a_3a_1}=k_3$.

Supposons d'abord que parmi les nombres $l, m-l, k_1, k_2, k_3$ il y en a un qui est plus petit que les quatre autres, ou bien qu'il y en a deux égaux entre eux et plus petits que les trois autres ou encore qu'il y en a trois égaux entre eux et plus petits que les deux autres.

Soit k la valeur du plus petit ou des plus petits nombres du système $l, m-l, k_1, k_2, k_3$. Posons $T_1=S^kTS^{-k}=(a_1b_1c_1d_1e_1)$. Alors a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont 5 nombres de la suite $1,2,...,n$, dont un, deux ou au maximum trois font partie du système a, b, c, d, e. Les deux substitutions T et T_1 engendrent donc toujours, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Ce groupe contient le groupe alternant G des substitutions des éléments a, b, c, d, e. D'après *) et le lemme V, en composant S avec les substitutions de G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il s'ensuit que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ dans ce cas.

Supposons maintenant que parmi les nombres $l, m-l, k_1, k_2, k_3$ il y en a quatre égaux entre eux (soit k leur valeur commune) et plus petits que le 5me, k'.

Si $k=1$, comme $n\geqslant 9$, on doit avoir $k'\geqslant 5$.

Si k' est l'un des trois nombres k_1, k_2, k_3, on a $T_1=S^3TS^{-3}= = (a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$ où parmi les nombres a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 figurent seulement les éléments a_4 et a_5 du système a, b, c, d, e. Donc, d'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Si k' est l'un des deux nombres l ou $m-l$, en posant encore $T_1=S^3TS^{-3}= =(a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$, nous pouvons affirmer que les deux cycles $(a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$ et $(a\, b\, c\, d\, e)$ ont quatre éléments consécutifs identiques et ne diffèrent que par leurs cinquièmes éléments. Donc, d'après la proposition 1, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Dans les deux cas, il résulte de *) et du lemme V, que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Soit $k>1$. Alors, d'après *), k' est premier avec k, et si l'on pose $T_1=S^{k'}TS^{-k'}=(a_1b_1c_1d_1e_1)$, un seul des cinq nombres a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 appartient au système a, b, c, d, e. Donc, d'après le lemme I, T et T_1 engendrent le groupe alternant des substi-

tutions des éléments qu'elles permutent, d'où il résulte que S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

D'après *) et comme $n \geqslant 9$, on ne saurait avoir $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Proposition V. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 9$, $l, m (1 \leqslant l < m < n)$ ainsi que les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont un au moins appartient à chacun des trois intervalles $\langle 1, l \rangle$, $\langle l+1, m \rangle$, $\langle m+1, n \rangle$, deux de ces intervalles contenant chacun deux nombres du système envisagé, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\, 2 \ldots l)(l+1 \ldots m)(m+1 \ldots n)$, $T = (a\, b\, c\, d\, e)$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair, c'est que $D(l, m-l, n-m, d_1, d_2) = 1$, $d_i (i = 1, 2)$ désignant la distance entre les deux éléments du système a, b, c, d, e qui font partie d'un même cycle de S.

Démonstration. Si la condition n'est pas vérifiée, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Donc la condition énoncée est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit

$$(*) \qquad D(l, m-l, n-m, d_1, d_2) = 1.$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'un seul élément du système a, b, c, d, e appartient à l'intervalle $\langle 1, l \rangle$ et soit a_1 cet élément. Désignons par a_2, a_3 les deux éléments du système a, b, c, d, e qui font partie de l'intervalle $\langle l+1, m \rangle$ et par a_4, a_5 les deux éléments dudit système qui appartiennent à l'intervalle $\langle m+1, n \rangle$.

Posons $\overline{a_2 a_3} = k_1$, $\overline{a_3 a_2} = k_2$, $\overline{a_4 a_5} = k_3$, $\overline{a_5 a_4} = k_4$.

Si parmi les nombres l, k_1, k_2, k_3, k_4 il y en a un qui est plus petit que les quatre autres, ou s'il y en a deux ou trois égaux entre eux et plus petits que les autres nombres de ce système, si l'on désigne par k la valeur du plus petit ou des plus petits nombres en question et si l'on pose $T_1 = S^k T S^{-k} = (a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1)$, les deux systèmes a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et a, b, c, d, e ont un, deux ou au maximum trois éléments communs. Donc, d'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe alternant G des substitutions des éléments

a,b,c,d,e. D'après *) et le lemme IV, en composant S avec les substitutions de G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Donc S,T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons maintenant que parmi les nombres l,k_1,k_2,k_3,k_4 il y en a quatre qui sont égaux entre eux et inférieurs au 5me. Si la valeur commune des quatre nombres égaux entre eux est 1, le 5me nombre k' est alors $\geqslant 5$. Si $k'=l$, posons $T_1=S^2TS^{-2}=$ $=(a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1)$. Les deux cycles $(a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1)$ et $(a\,b\,c\,d\,e)$ ont alors quatre éléments consécutifs identiques et ne diffèrent que par leur 5mes éléments. Les deux substitutions T et T_1 engendrent donc, d'après la proposition 1, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. On en déduit sans peine que S,T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Si k' est l'un des quatre nombres k_1,k_2,k_3,k_4, posons encore $T_1=S^2TS^{-2}=(a_1b_1c_1d_1e_1)$. Les deux systèmes a_1,b_1,c_1,d_1,e_1 et a,b,c,d,e ont, dans ce cas, trois éléments communs. Donc les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'où il découle que S,T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Si la valuer commune k des quatre nombres du système a,b,c,d,e qui sont plus petits que k' est >1, d'après *), k et k' sont premiers entre eux et, par suite, si l'on pose, $T_1=S^{k'}TS^{-k'}=$ $=(a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1)$, un seul nombre du système a_1,b_1,c_1,d_1,e_1 appartient à la suite a,b,c,d,e. Donc T et T_1 engendrent, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent et, p. c., S,T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

D'après *), comme $n\geqslant 9$, on ne saurait avoir $l=k_1=k_2=k_3=k_4$.

Notre proposition est ainsi établie.

Proposition VI. Quels que soient les nombres entiers $n\geqslant 9$, k,l,m $(1\leqslant k<l<m<n)$ ainsi que les cinq nombres a,b,c,d,e de la suite $1,2,\ldots,n$, dont l'un au moins appartient à chacun des intervalles $\langle 1,k\rangle$, $\langle k+1,l\rangle$, $\langle l+1,m\rangle$, $\langle m+1,n\rangle$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S=(1\,2\ldots k)(k+1\ldots l)(l+1\ldots m)(m+1\ldots n)$, $T=(a\;b\;c\;d\;e)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est impair, ou une base du groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est pair, c'est que $D(k,l-k,m-l,n-m,d)=1$, d désignant la distance entre les deux nombres du système a,b,c,d,e qui appartiennent à un même cycle de S.

Démonstration. On voit immédiatement que la condition énoncée est nécessaire, car si elle n'est pas satisfaite, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Montrons qu'elle est suffisante. Soit

(*) $$D(k, l-k, m-l, n-m, d)=1.$$

Supposons, pour fixer les idées, que les deux nombres du système a, b, c, d, e qui font partie d'un même cycle de S sont $>m$. Désignons par a_4, a_5 ces deux nombres et soient a_1, a_2, a_3 les trois nombres du système a, b, c, d, e qui font partie respectivement du 1er, du 2d et du 3me cycle de S.

Posons $\overline{a_4 a_5}=k_1$, $\overline{a_5 a_4}=k_2$. Si parmi les nombres $k, l-k, m-l, k_1, k_2$ il y en a un qui est le plus petit, ou s'il y en a deux ou trois qui sont égaux entre eux et plus petits que les autres, désignons par k_0 la valeur du plus petit ou des plus petits de ces nombres et posons $T_1=S^{k_0}TS^{-k_0}=(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1)$. Alors les deux ensembles a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et a, b, c, d, e ont un, deux ou au plus trois éléments communs. Les deux substitutions T et T_1 engendrent donc, d'après le lemme I, le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe alternant G des substitutions des éléments a, b, c, d, e. D'après *) et le lemme VI, en composant S avec les substitutions de G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Donc les substitutions S, T constituent bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons, à présent, que parmi les nombres $k, l-k, m-l, k_1, k_2$ il y en a quatre qui sont égaux entre eux (désignons par k_0 leur valeur commune) et plus petits que le 5me, que nous désignons par k'.

Si $k_0=1$, on a $k'\geqslant 5$. Posons $T_1=S^2TS^{-2}=(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1)$. Si k' est l'un des deux nombres k_1, k_2, les deux systèmes de nombres a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et a, b, c, d, e ont trois éléments communs. Donc, d'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent.

Si k' est l'un des nombres $k, l-k, m-l$, les deux cycles $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)$ et (a, b, c, d, e) ont 4 éléments consécutifs identiques et ne diffèrent que par leurs 5mes éléments. Donc, d'après la proposition 1, T et T_1 engendrent le groupe al-

ternant des éléments qu'elles permutent. Il en résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$, ou de $\mathfrak{A}_n$.

Si $k_0 > 1$, d'après *), les deux nombres k_0 et k' sont premiers entre eux. Posons $T_1 = S^{k'}TS^{-k'} = (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1)$. Les deux ensembles a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et a, b, c, d, e ont alors un seul élément commun. Donc, d'après le lemme I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

D'après *), comme $n \geqslant 9$, on ne saurait avoir $k = l - k = m - l = k_1 = k_2$.

Notre proposition est ainsi établie.

P r o p o s i t i o n VII. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 9$, j, k, l, m $(1 \leqslant j < k < l < m < n)$ ainsi que les cinq nombres entiers a, b, c, d, e dont un et un seul appartient à chacun des cinq intervalles $\langle 1, j \rangle$, $\langle j+1, k \rangle$, $\langle k+1, l \rangle$, $\langle l+1, m \rangle$, $\langle m+1, n \rangle$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions

$$S = (12 \ldots j)(j+1 \ldots k)(k+1 \ldots l)(l+1 \ldots m)(m+1 \ldots n), \quad T = (abcde)$$

constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair, c'est que $D(j, k-j, l-k, m-l, n-m) = 1$.

D é m o n s t r a t i o n. On voit immédiatement que la condition est nécessaire, car si elle n'est pas satisfaite, les deux substitutions S et T engendrent un groupe imprimitif. Montrons qu'elle est suffisante. Soit

$$(*) \qquad D(j, k-j, l-k, m-l, n-m) = 1.$$

Supposons, pour fixer les idées, que

$$1 \leqslant a \leqslant j < b \leqslant k < c \leqslant l < d \leqslant m < e \leqslant n.$$

Les deux couples de substitutions S, T et T, ST engendrent le même groupe.

On a $ST = (a\, b+1 \ldots k j+1 \ldots b c+1 \ldots l k+1 \ldots c d+1 \ldots m l+1 \ldots$ $\ldots d\, e+1 \ldots n m+1 \ldots e a+1 \ldots j\, 1\, 2 \ldots a-1)$.

C'est une substitution circulaire. Posons

$$U = \begin{pmatrix} a & b+1 \ldots & b & \ldots & c & \ldots & d & \ldots & e & \ldots a-1 \\ 1 & 2 & \ldots 1+k-j & \ldots & 1+l-j & \ldots & 1+m-j & \ldots & 1+n-j & \ldots \quad n \end{pmatrix}.$$

Il vient $USTU^{-1}=R=(1\,2\ldots n)$

$UTU^{-1}=T_1=(1\;1+k-j\;1+l-j\;1+m-j\;1+n-j)$.

Les deux couples de substitutions ST, T et R, T_1 engendrent des groupes simplement isomorphes. Et, comme $D(k-j, l-j, m-j, n-j, n) = D(j, k-j, l-k, m-l, n-m) = 1$, d'après la proposition I, les deux substitutions R et T_1 engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il en est donc de même de S, T, c. q. f. d.

Definitions. *Désignons par* $1,2,\ldots,n$ *les éléments d'une substitution de degré* n.

Nous dirons que deux substitutions S, T du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ sont *connexes* s'il n'existe aucun vrai sous-ensemble E_1 de l'ensemble $E=\{1,2,\ldots,n\}$ qui est transformé en lui même aussi bien par la substitution S que par la substitution T.

Nous dirons que deux substitutions connexes S, T du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ sont *imprimitives* s'il existe une décomposition de l'ensemble E en $\mu>1$ sous-ensembles, disjoints deux à deux, $E_1, E_2, \ldots, E_\mu$ $(E=E_1+E_2+\ldots+E_\mu)$, comprenant chacun un même nombre $\nu>1$ d'éléments, la substitution S aussi bien que la substitution T transformant tout ensemble E_i en un ensemble E_j $(1\leqslant i\leqslant\mu, 1\leqslant j\leqslant\mu)$. Dans le cas contraire, nous dirons que les deux substitutions S et T sont *primitives*.

Les propositions I-VII peuvent être résumées en une seule, savoir:

Quels que soient le nombre entier $n\geqslant 9$ et les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite $1,2,\ldots,n$, la condition nécessaire et suffisantes pour que deux substitutions connexes S et T du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, dont l'une $T=(a\,b\,c\,d\,e)$, constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, c'est qu'elles soient primitives.

SUR LES INTÉGRALES BORNÉES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par Z. Butlewski, Poznań

§ 1. Dans cet article je m'occupe des intégrales bornées d'équation différentielle du second ordre non linéaire

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(t)x^{2i+1}=0,$$

où *les coefficients* $A_{2i+1}(t)$ $(i=0,1,...,m)$, $\theta(t)$ *sont des fonctions continues, dérivables et positives de la variable réelle* t *pour* $t\geqslant t_0>0$.

Selon Kneser[1]) si les coefficients de l'équation (1) sont des fonctions continues et positives pour $t\geqslant t_0>0$, toute intégrale est *oscillante* pour les grandes valeurs de t, c.-à-d. possède une infinité de zéros positifs.

Dans mon article[2]) j'ai démontré le théorème suivant: Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+A(t)x=0,$$

où les coefficients $A(t)$, $\theta(t)$ sont des fonctions continues, dérivables et positives de la variable réelle t pour $t\geqslant t_0>0$. Si nous supposons que $(A\cdot\theta)'>0$ pour $t>t_0$, toute intégrale $x(t)$ est bornée lorsque $t\to+\infty$. Dans le § 2 nous obtenons le résultat analogue pour l'équation (1): si $(A_{2i+1}\theta)'>0$ $(i=0,1,,...,m)$ pour $t\geqslant t_0>0$, toute intégrale $x(t)$ de l'équation (1) est bornée lorsque $t\to+\infty$.

---

[1]) A. Kneser, *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen, t. 42, 1893.

[2]) Z. Butlewski, *Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre*, Mathematica, Cluj 1936.

Dans le § 3 nous appliquons le résultat du § 2 à l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+B(t)\frac{dx}{dt}+\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(t)\,x^{2i+1}=0,$$

où *les coefficients* $A_{2i+1}(t)$, $B(t)$ $(i=0,1,\dots,m)$ *sont des fonctions continues et* $A_{2i+1}(t)$ $(i=0,1,\dots,m)$ *sont positives et dérivables pour* $t\geqslant t_0>0$.

Dans le § 4 nous obtenons les conditiones suffissantes pour que toute intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\theta_{n-1}\frac{d}{dt}\left[\theta_{n-2},\dots,\theta_2\frac{d}{dt}\left(\theta_1\frac{dx}{dt}\right)\dots\right]\right\}+\\ &+A_{n-1}\frac{d}{dt}\left\{\theta_{n-2}\frac{d}{dt}\left[\theta_{n-3},\dots,\theta_2\frac{d}{dt}\left(\theta_1\frac{dx}{dt}\right)\dots\right]\right\}\dots+\\ &+A_3\frac{d}{dt}\left[\theta_2\frac{d}{dt}\left(\theta_1\frac{dx}{dt}\right)\right]+A_2\frac{d}{dt}\left(\theta_1\frac{dx}{dt}\right)+A_1\frac{dx}{dt}+A_0x=f\end{aligned}$$

[les coefficients A_i $(i=0,1,\dots,n-1)$, θ_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ *et* f *sont des fonctions continues de la variable* t *pour* $t\geqslant t_0>0]$ et leurs k prémièrs dérivées $x'(t),x''(t),\dots,x^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$ soient bornées lorsque $t\to+\infty$.

§ 2. Désignons par $t_1,t_2,\dots,t_n,\dots$ les zéros plus grands que t_0 d'une intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle (1) $(t_0<t_1<t_2<\dots)$.

Nous démontrerons que si $\theta(t)>0$ et $A_{2i+1}(t)>0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$, chaque intervalle (t_n,t_{n+1}) contient un zéro et un seul de la dérivée $x'(t)$.

En effet, d'après le théorème de ROLLE il y a dans l'intervalle (t_n,t_{n+1}) un zéro au moins de la dérivée $x'(t)$. Si cet intervalle contenait deux zéros τ_n,τ_{n+1}, on aurait:

$$(\theta x')_{t=\tau_n}=0 \quad \text{et} \quad (\theta x')_{t=\tau_{n+1}}=0.$$

D'après le théorème de ROLLE il existerait un point T_n $(t_n<T_n<t_{n+1})$ où $(\theta x')'_{t=T_n}=0$. D'après (1) on aurait alors la relation

$$\left(x\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(t)\,x^{2i}\right)_{t=T_n}=0,$$

qui entraîne l'égalité $x(T_n)=0$. Or c'est imposible, car les zéros t_n, t_{n+1} sont consécutifs.

Désignons par z_n $(t_n < z_n < t_{n+1})$ le zéro de la dérivée $x'(t)$ et posons pour abréger:

$$u_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{et} \quad A_{2i+1}(t)\,\theta(t) = \lambda_{2i+1}(t).$$

En multipliant l'équation différentielle (1) par $2\theta x'$ et en intégrant l'égalité obtenue par parties entre les limites a et b on obtient l'équation

$$(4)\quad \begin{aligned} &\theta^2(b)x'^2(b) - \theta^2(a)x'^2(a) + \sum_{i=0}^{m}\Big[\lambda^{2i+1}(b)\frac{x^{2i+2}(b)}{i+1} - \\ &-\lambda_{2i+1}(a)\frac{x^{2i+2}(a)}{i+1}\Big] - \int_a^b\Big[\sum_{i=0}^{m}\lambda'_{2i+1}\frac{x^{2i+2}}{i+1}\Big]dt = 0. \end{aligned}$$

Si $x(a)=x(b)$ on peut écrire l'égalité (2) sous la forme suivante:

$$(5)\quad \theta^2(b)x'^2(b) - \theta^2(a)x'^2(a) = \int_a^b \sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda'_{2i+1}}{i+1}[x^{2i+2}(t) - x^{2i+2}(a)]\,dt.$$

Si a est un point de l'intervalle (t_n, z_n), b un point de l'intervalle (z_n, t_{n+1}) et si $\lambda'_{2i+1} > 0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ dans (t_n, t_{n+1}), le second membre de l'égalité (5) est manifestement positif; il résulte que

$$(6)\quad |\theta(b)\,x'(b)| > |\theta(a)\,x'(a)|.$$

Si de plus $\theta' \leqslant 0$ on aura $|x'(b)| > |x'(a)|$ et en particulier

$$(7)\quad |x'(t_{n+1})| > |x'(t_n)|,$$

il est donc évident que

$$(8)\quad u_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n} > 0.$$

Si $\lambda'_{2i+1} < 0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$, $\theta' \geqslant 0$ les inégalités (6), (7), (8) sont remplacées par des inégalités contraires.

Posons maintenant dans (4) $a=z_n$, $b=z_{n+1}$ nous aurons

$$\sum_{i=0}^{m}[\lambda_{2i+1}(z_{n+1})x^{2i+2}(z_{n+1})-\lambda_{2i+1}(z_n)x^{2i+2}(z_n)]\frac{1}{i+1}= \tag{9}$$
$$=\int_{z_n}^{z_{n+1}}\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda'_{2i+1}}{i+1}x^{2i+2}(t)\right]dt.$$

En posant pour abréger $x(z_n)=x_n$, $x(z_{n+1})=x_{n+1}$ ajoutons aux deux membres de l'égalité (9) la quantité

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_{2i+1}(z_n)x_{n+1}^{2i+2}\frac{1}{i+1};$$

le résultat peut s'écrire:

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda_{2i+1}(z_n)}{i+1}[x_{n+1}^{2i+2}-x_n^{2i+2}]+\int_{z_n}^{z_{n+1}}\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda'_{2i+1}}{i+1}[x_{n+1}^{2i+2}-x^{2i+2}(t)]dt=0. \tag{10}$$

L'égalité (10) est évidemment imposible si $\lambda'_{2i+1}>0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ dans l'intervalle (z_n,z_{n+1}) et si $x_{n+1}^2>x_n^2$. Soustrayons maintenant des deux membres de l'égalité (9) la quantité

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_{2i+1}(z_{n+1})x_n^{2i+2}\frac{1}{i+1};$$

il vient:

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_{2i+1}(z_{n+1})[x_{n+1}^{2i+2}-x_n^{2i+2}]\frac{1}{i+1}+ \tag{11}$$
$$+\int_{z_n}^{z_{n+1}}\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda'_{2i+1}}{i+1}[x_n^{2i+2}-x^{2i+2}(t)]dt=0,$$

égalité imposible si $\lambda'_{2i+1}<0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ dans l'intervalle (z_n,z_{n+1}) et si $|x_{n+1}|<|x_n|$.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème I. *a) Si* $(A_{2i+1}\theta)'<0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ *pour* $t>t_0$, *les suites*

$$\left\{\sqrt{\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(z_n)\theta(z_n)\frac{x_n^{2i+2}}{i+1}}\right\}\quad et\quad \{|\theta(t_n)x'(t_n)|\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est croissante; si de plus* $\theta'\geqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est décroissante et* $u_n<0$.

β) Si $(A_{2i+1}\theta)'>0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ *pour* $t>t_0$ *les suites*

$$\left\{\sqrt{\sum_{i=0}^{m} A_{2i+1}(z_n)\,\theta(z_n)\,\frac{x_n^{2i+2}}{i+1}}\right\} \quad \text{et} \quad \{|\theta(t_n)\,x'(t_n)|\}$$

sont croissantes tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est décroissante, l'intégrale* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t\to+\infty$*; si de plus* $\theta'\leqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est croissante et* $u_n>0$.

§ 3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2}+B(t)\frac{dx}{dt}+\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(t)x^{2i+1}=0. \tag{2}$$

En multipliant l'équation (2) par $e^{\int Bdt}$, on obtient l'équation:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int B(t)\,dt}\frac{dx}{dt}\right]+e^{\int B(t)\,dt}\sum_{i=0}^{m}A_{2i+1}(t)x^{2i+1}=0. \tag{12}$$

L'équation (12) est du même type que l'équation (1), on peut donc appliquer à l'équation (12) le théorème I. On obtient ainsi la proposition suivante:

Théorème II. *α) Si* $A'_{2i+1}+2A_{2i+1}B<0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ *pour* $t>t_0$ *les suites*

$$\left\{\sqrt{\sum_{t=0}^{m} A_{2i+1}(z_n)\,e^{\int_{t_0}^{z_n}Bdt}\,\frac{x_n^{2i+2}}{i+1}}\right\} \quad \text{et} \quad \{[e^{\int_{t_0}^{t}Bdt}]_{t=t_n}|x'(t_n)|\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est croissante; si de plus* $B\geqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est décroissante et* $u_n<0$.

β) Si $A'_{2i+1}+2A_{2i+1}B>0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ *pour* $t>t_0$ *les suites*

$$\left\{\sqrt{\sum_{i=0}^{m} A_{2i+1}(z_n)\,e^{\int_{t_0}^{z_n}Bdt}\,\frac{x_n^{2i+2}}{i+1}}\right\} \quad \text{et} \quad \{[e^{\int_{t_0}^{t}B\,dt}]_{t=t_n}|x'(t_n)|\}$$

sont croissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est décroissante, l'intégrale* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t\to+\infty$*; si de plus* $B\leqslant 0$*, la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est croissante et* $u_n>0$.

Corollaire. *Si* $A_{2i+1}>0$, $A'_{2i+1}>0$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ *et* $B\geqslant 0$ *pour* $t>t_0$*, toute intégrale oscillante de l'équation* (2) *est bornée lorsque* $t\to+\infty$.

§ 4. Soit donné un système des équations différentielles

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}+a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=f,\\
&\frac{dx_2}{dt}+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=f_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dx_n}{dt}+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=f_n,
\end{aligned}
$$

où les coefficients a_{ik} $(i,k=1,2,\dots,n)$ et f_i $(i=1,2,\dots,n)$ sont des fonctions continues de la variable réelle t pour $t\geqslant t_0>0$.

Dans mon article [3]) j'ai démontré le théorème suivant: Si

$$
\int_{t_0}^{\infty}|a_{ii}(t)|\,dt<+\infty,\quad \int_{t_0}^{\infty}|a_{ik}(t)+a_{ki}(t)|\,dt<+\infty \quad\text{et}\quad \int_{t_0}^{\infty}|f_i(t)|\,dt<+\infty
$$
$$
(i=1,2,\dots,n),\ (i,k=1,2,\dots,n;\,i\neq k),
$$

toute intégrale $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)$ du système (13) est bornée lorsque $t\to+\infty$.

Considérons l'équation différentielle (3). En supposant que les coefficients θ_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ ne s'annulent pas pour $t\geqslant t_0>0$, on peut remplacer l'équation (3) par le système des équations différentielles:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}-\theta_1^{-1}y_1=0,\\
&\frac{dy_1}{dt}-\theta_2^{-1}y_2=0,\\
&\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_{n-2}}{dt}-\theta_{n-1}^{-1}y_{n-1}=0,\\
&\frac{dy_{n-1}}{dt}+A_0x+\sum_{i=0}^{n-1}A_i\theta_i^{-1}y_i=f.
\end{aligned}
$$

Le système (14) est du type (13). En appliquant le théorème cité ci-dessus au système (14) nous obtenons le

---

[3]) Z. Butlewski, *O całkach rzeczywistych równań różniczkowych zwyczajnych*, Wiadomości Matematyczne, t. 44, Warszawa 1937.

Théorème III. Si

$$
(\mathrm{W}_1)\quad
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\infty}|\theta_i^{-1}|dt<+\infty \quad (i=1,2,\dots,n-2),\\
&\int_{t_0}^{\infty}|A_0|dt<+\infty,\\
&\int_{t_0}^{\infty}|A_i\theta_i^{-1}|dt<+\infty \quad (i=1,2,\dots,n-3,n-1),\\
&\int_{t_0}^{\infty}|A_{n-2}\theta_{n-2}^{-1}+\theta_{n-1}^{-1}|dt<+\infty \quad \textit{et} \quad \int_{t_0}^{\infty}|f|dt<+\infty,
\end{aligned}
$$

alors toute intégrale $x(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)$ *du système* (14) *est bornée lorsque* $t\to+\infty$.

Remarque 1. On peut remplacer les conditiones (W_1) par des conditiones plus simples mais moins générales:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\infty}|\theta_i^{-1}|dt<+\infty \quad (i=1,2,\dots,n-1),\\
&\int_{t_0}^{\infty}|A_i\theta_i^{-1}|dt<+\infty \quad (i=1,2,\dots,n-1),\\
&\int_{t_0}^{\infty}|A_0|dt<+\infty \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{\infty}|f|dt<+\infty.
\end{aligned}
$$

Remarque 2. Il résulte de théorème III que si les conditiones (W_1) sont remplies, toute intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle (3) est bornée lorsque $t\to+\infty$.

D'après (14) on a

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=\varphi_1(\theta_1^{-1},y_1),\\
&\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_2(\theta_1^{-1},\theta_1^{1},\theta_2^{-1},y_1,y_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=\varphi_{n-1}(\theta_1^{-1},\theta_1',\dots,\theta_1^{(n-2)};\theta_2^{-1},\theta_2',\dots,\theta_2^{(n-3)};\dots\\
&\qquad\qquad \dots;\theta_{n-2}^{-1}\theta_{n-2}';\theta_{n-1}^{-1};y_1,y_2,\dots,y_{n-1}),\\
&\frac{d^nx}{dt^n}=\varphi_n(\theta_1^{-1},\theta_1',\theta_1'',\dots,\theta_1^{(n-1)};\ \theta_2^{-1},\theta_2',\theta_2'',\dots,\theta_2^{(n-2)};\dots\\
&\qquad\qquad \dots\theta_{n-1}^{-1},\theta_{n-1}';y_1,y_2,\dots,y_{n-1},y_{n-1}'),
\end{aligned}
$$

où les fonctions φ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ sont des polynomes des variables θ_i^{-1}, y_i et des leurs dérivées. Si toutes les variable qui figurent dans ces polynomes sont bornées, alors les polynomes sont bornés.

En tenant compte du théorème III et des formules (15) nous pouvons donc énoncer le

Théorème IV. Si les conditiones

$$(\mathrm{W}_1)\qquad \begin{aligned} &\int_{t_0}^{\infty}|\theta_i^{-1}|\,dt<+\infty \quad (i=1,2,\ldots,n-2),\\ &\int_{t_0}^{\infty}|A_0|\,dt<+\infty,\\ &\int_{t_0}^{\infty}|A_i\theta_i^{-1}|\,dt<+\infty \quad (i=1,2,\ldots,n-3,n-1),\\ &\int_{t_0}^{\infty}|A_{n-2}\theta_{n-2}^{-1}+\theta_{n-1}^{-1}|\,dt<+\infty \quad \textit{et} \quad \int_{t_0}^{\infty}|f|\,dt<+\infty \end{aligned}$$

sont remplies et si les valeurs absolues des fonctions

$$(\mathrm{W}_2)\qquad \begin{aligned} &\theta_1^{-1},\theta_2^{-1},\ldots,\theta_{k-1}^{-1},\theta_k^{-1};\\ &\theta_1',\theta_2',\ldots,\theta_{k-1}';\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\theta_1^{(k-2)},\theta_2^{(k-2)};\\ &\theta_1^{(k-1)} \end{aligned}$$

sont bornées pour $t\geqslant t_0>0$, alors toutes les intégrales $x(t)$ de l'équation différentielle (3) et leurs k prémièrs dérivées: $x'(t),x''(t),\ldots,x^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ sont bornées lorsque $t\to+\infty$.

Si les conditiones (W_1) *et* (W_2) *(dans* W_2 *on pose $k=n$ et $\theta_n=1$) sont remplies et si de plus les valeurs absolues des fonctions A_i $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ et f sont bornées pour $t\geqslant t_0>0$, alors toute intégrale $x(t)$ et ses n prémièrs dérivées sont bornées lorsque $t\to+\infty$.*

THÉORIE DES MULTIPLICITÉS RÉGULIÈRES D'ÉLÉMENTS DE CONTACT UNIS. APPLICATION AUX TRANSFORMATIONS CANONIQUES

Par TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków

Notations. Les indices des fonctions et des variables indépendantes seront placés en haut de la lettre. Nous écrirons donc $x^i(u^1,...,u^m)$ au lieu d'écrire $x_i(u_1,...,u_m)$. Nous adoptons les notations usuelles

$$x^i_{u^j}(u^1...,u^m)=\frac{\partial x^i(u^1,...,u^m)}{\partial u^j}, \quad f_{u^j u^k}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k}.$$

Une *fonction* $f(u^1,...,u^m)$ sera dite être *de classe* C^i (ou de classe C^∞) dans un ensemble E de points $(u^1,...,u^m)$, lorsqu'elle y possède des dérivées partielles continues d'ordre i (ou de tous les ordres). Si $i<j$ alors toute fonction qui est de classe C^j dans E est évidemment aussi de classe C^i dans E.

Introduction

Avant d'indiquer le but et de résumer les résultats du présent travail[1]). nous croyons utile de préciser le sens de quelques notions intervenant dans la suite, ce qui permettra d'éviter des confusions possibles.

Tout plan situé dans l'espace de points

$$X^1,...,X^n,S$$

plan non parallèle à l'axe S et passant par le point

(1) $$x^1,...,x^n,s$$

[1]) Les résultats du § 1 et du § 2 du présent travail ont été communiqués à la Société Polonaise de Mathématique (section de Cracovie) le 20.X.1937.

est représenté par l'équation

$$(2) \qquad S-s=\sum_{i/1}^{n} y^i(X^i-x^i)$$

où les nombres $y^1,...,y^n$ désignent les coefficients angulaires de ce plan. Le couple de deux objets géométriques et notamment du point (1) et du plan (2) est appelé *élément de contact* ou tout court *élément*. Les $2n+1$ nombres figurant dans la suite

$$(3) \qquad x^1,...x^n, s, y^1,...,y^n$$

constituent les *coordonnées de cet élément*.

Considérons une multiplicité M d'éléments dépendant de m paramètres $u^1,...,u^m$

$$(4) \qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} x^i &= x^i(u^1,...,u^m) \\ y^i &= y^i(u^1,...,u^m) \end{aligned}\right\} (i=1 \;...\; n) \\ s = s(u^1,...,u^m) \end{cases}$$

et supposons que les fonctions x^i, y^i, s soient au moins de classe C^1 dans un voisinage d'un point $U_0=(u_0^1,...,u_0^m)$. Nous dirons que cette *multiplicité est régulière au point* U_0 lorsque le rang de la matrice jacobienne

$$(5) \qquad \left\| \frac{D(x^1,...,x^n,s,y^1,...,y^n)}{D(u^1,...,u^m)} \right\|$$

est égal à m (c.-à-d. au nombre des paramètres $(u^1,...,u^m)$ dans un certain voisinage de U_0[1]). Dans le cas contraire on dit que la multiplicité (4) est *singulière au point* U_0. On dit que la multiplicité M est une *multiplicité d'éléments* (de contact) *unis* dans un ensemble E de points $(u^1,...,u^m)$ lorsque l'équation

$$(6) \qquad ds(u^1,...,u^m)=\sum_{i/1}^{n} y^i(u^1,...,u^m)\,dx^i(u^1,...,u^m)$$

ou, ce qui revient au même, le système d'équations

$$(6\,\text{bis}) \qquad s_{u^j}=\sum_{i/1}^{n} y^i x^i_{u^j}$$

est rempli en tout point de l'ensemble E.

[1]) Ça veut dire que la matrice (5) contient au moins un déterminant non nul d'ordre m. On dit, dans ce cas, que les paramètres $u^1,...,u^m$ sont essentiels au point U_0.

Nous supposons dans la suite que (4) représente une multiplicité d'éléments unis. Le rang de la matrice (5) est alors égal, en raison de (6bis) au rang de la matrice

$$(7) \qquad \left\| \frac{D(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)}{D(u^1,\ldots,u^m)} \right\|$$

en tout point de E.

La multiplicité ponctuelle

$$(8) \qquad \begin{cases} x^i = x^i(u^1,\ldots,u^m), \ (i=1,\ldots,n) \\ s = s(u^1,\ldots,u^m) \end{cases}$$

est appelée *support ponctuel* de la multiplicité d'éléments unis (4).

Le rang de la matrice jacobienne

$$(9) \qquad \left\| \frac{D(x^1,\ldots,x^n,s)}{D(u^1,\ldots,u^m)} \right\|$$

est égal (cf. 6bis), en tout point de E, au rang de la matrice

$$(10) \qquad \left\| \frac{D(x^1,\ldots,x^n)}{D(u^1,\ldots,u^m)} \right\|.$$

On donne généralement une méthode bien simple [1]) (nous l'apellerons *méthode usuelle*) de la construction de la solution générale de l'équation (6). Nous allons montrer que cette méthode ne peut pas fournir toutes les solutions régulières de l'équation (6) qui sont valables dans un voisinage suffisamment petit de U_0.

La condition nécessaire pour qu'une multiplicité d'éléments unis de la forme (4) puisse être obtenue au moyen de la méthode usuelle dans un voisinage de U_0 consiste en ce que *le rang de la matrice* (10) *soit le même pour les points d'un certain voisinage du point* U_0.

Or il est facile de construire (cf. § 6, Exemple 1) un exemple d'une multiplicité d'éléments unis régulière au voisinage de U_0 et telle que 1⁰) le rang de la matrice (10) soit égal à $m-1$ au point U_0, 2⁰) chaque voisinage de U_0 renferme des points pour lesquels le rang de cette matrice soit égal à m, 3⁰) les fonctions x^i, y^i, s soient analytiques dans un voisinage de U_0.

[1]) Cf. par exemple C. Carathéodory, *Variationsrechnung* (1935), p. 102—105.

La méthode usuelle ne peut donc fournir toutes les solutions régulières de l'équation (6) (valables dans un voisinage suffisamment petit de U_0) *même dans le cas où il s'agit des solutions analytiques.*

L'observation qui suit permet de se rendre compte du degré de généralité de la méthode usuelle. Soit

(11) $$\Lambda^1(u^1, \dots, u^m), \dots, \Lambda^k(u^1, \dots, u^m)$$

une suite de k fonctions *continues* dans un ensemble ouvert Ω. Cela posé il existe une suite infinie d'ensembles disjoints

$$R, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

jouissant des propriétés suivantes: 1°) $\Omega = R + \Sigma\omega_\nu$, 2°) les ω_ν sont ouverts, 3°) la somme $\Sigma\omega_\nu$ constitue un ensemble partout dense et R un ensemble nulle part dense relativement à Ω, 4°) si une fonction quelconque de la suite (11) s'annulle dans un point d'un ensemble ω_ν, elle s'y annulle identiquement, et, par conséquent, si cette fonction est non nulle dans un point d'un ω_ν elle ne s'annulle en aucun point de cet ensemble.

Rangeons maintenant tous les déterminants partiels (d'ordres 1, 2, 3, ...) de la matrice (5) en une suite (évidemment finie). Désignons cette suite par (11) et déterminons les ω_ν et R comme tout à l'heure. La méthode usuelle réussira séparément dans chaque ensemble ω_ν, pourvu que les ensembles ω_ν soient suffisamment petits, ce qui est toujours à réaliser. La généralité de la méthode usuelle consiste en ce que la somme $\Sigma\omega_\nu$ des ensembles, ou elle peut être appliquée, constitue un ensemble partout dense relativement à Ω. L'exemple cité plus haut montre qu'un point U_0, au voisinage duquel la multiplicité (4) est régulière, peut forcément appartenir à l'ensemble R, lequel ensemble est nulle part dense relativement à Ω.

Voici un autre désavantage de la méthode usuelle. Il peut arriver qu'une multiplicité régulière d'éléments unis M de la forme (4) peut être obtenue, dans un voisinage de U_0, au moyen de la méthode usuelle. Or il est facile de montrer qu'en appliquant à la multiplicité M une transformation de contact convenable on obtiendra une multiplicité M_1 qui ne peut pas être obtenue par la méthode usuelle en aucun voisinage de U_0. *La possibilité d'obtenir une multiplicité régulière d'éléments unis par la méthode usuelle n'est donc pas invariante relativement aux transformations de contact* (cf. encore l'Exemple 1 du § 6).

Le dernier désavantage est essentiel car il est évident que la propriété d'une multiplicité d'éléments unis, consistant en

ce qu'elle est régulière au voisinage d'un point U_0, est invariante relativement aux transformations de contact.

Le premier but du présent travail sera de combler les lacunes, mentionnées plus haut, de la méthode usuelle, lacunes qu'elle présente même sur le terrain des fonctions analytiques.

Le deuxième but sera de construire la solution régulière la plus générale *de classe* C^1 de l'équation (6), solution valable dans un certain voisinage d'un point quelconque U_0. (La méthode usuelle ne fournit que des solutions d'une classe plus élevée que C^1).

Nous poursuivrons ces deux buts à la fois en construisant une méthode dépourvue des désavantages mentionnés de la méthode usuelle. La réalisation des deux buts en question est liée au problème suivant: Trouver la condition relative aux fonctions

$$x^i(u^1,\dots,u^m),\quad y^i(u^1,\dots,u^m),$$

condition qui serait nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $s(u^1,\dots,u^m)$ vérifiant identiquement l'équation (6). On démontre facilement, dans le cas où les y^i sont de classe C^1 et les x^i et s *sont de classe* C^2 que cette condition consiste en ce que le système d'équations

$$\text{(12)}\qquad \sum_{i/1}^{n}\left\| \begin{matrix} x^i_{u^\alpha}, y^i_{u^\alpha} \\ x^i_{u^\beta}, y^i_{u^\beta} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

ou, autrement écrit, le système

$$[u^\alpha, u^\beta]=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

soit identiquement vérifié. Grace à un lemme élémentaire (Lemme 1 du § 1) nous démontrons que cette condition est nécessaire et suffisante aussi dans le cas où les fonctions x^i, y^i, s sont de classe C^1 (§ 2, Théorème 1). Cette observation est essentielle pour le deuxième but de notre travail d'une part et ramène la recherche des multiplicités régulières d'éléments unis à la recherche des solution régulières [1]) $x^1,\dots,y^n$ du système (12).

---

[1]) Nous dirons qu'une suite de fonction $x^1,\dots,y^n$ représente une solution régulière du système (12) dans un ensemble E de points $(u^1,\dots,u^m)$ lorsque ces fonctions sont de classe C^1 et le rang de la matrice (7) est égal à m en tout point de l'ensemble E.

Voici une autre observation essentielle pour la réalisation du deuxième but de notre travail.

Supposons que les fonctions $x^1,\ldots,x^n$, $y^1,\ldots,y^n$ constituent une solution (régulière ou non mais valable dans un ensemble contenant un point U_0) du système (12) et formons la matrice

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} x^1,\ldots,x^n \\ y^1,\ldots,y^n \end{matrix} \right\| .$$

Désignons par r le rang de la matrice (7) au point U_0. Ceci étant, on peut indiquer r colonnes différentes de la matrice (13) et on peut ensuite choisir une fonction dans chacune de ces colonnes de façon à obtenir une suite de r fonctions $x^{\gamma_1},\ldots,x^{\gamma_k},y^{\delta_1},\ldots,y^{\delta_l}$ $(k+l=r)$ telle que le rang de la matrice jacobienne

$$\left\| \frac{D(x^{\gamma_1},\ldots,x^{\gamma_k},y^{\delta_1},\ldots,y^{\delta_l})}{D(u^1,\ldots,u^m)} \right\|$$

soit égal à r au point U_0 (§ 2, Théorème 1 et Coroll. 1).

Cette observation relative à la matrice (7) se rattache de près à un théorème rencontré dans la théorie des transformations canoniques[1]). Il est à peu près évident que ni la première observation ni la seconde ne peuvent être justifiées au moyen de la méthode usuelle mentionnée plus haut.

Le Théorème 2 du § 5 présente une construction de la plus générale solution régulière du système (12), solution valable dans un voisinage suffisamment petit d'un point arbitrairement choisi U_0. Le Théorème 3 du § 5 fournit une construction de la plus générale multiplicité régulière d'éléments unis déterminée dans un voisinage suffisamment petit de U_0.

Supposons qu'une multiplicité d'éléments unis (4) soit régulière au voisinage d'un point U_0. Supposons que les fonctions

$$u^j=\lambda^j(v^1,\ldots,v^p), \qquad (j=1,\ldots,m)$$

soient de classe C^1 au voisinage d'un point $V_0=(v_0^1,\ldots,v_0^p)$ et que $u_0^j=\lambda^j(v_0^1,\ldots,v_0^p)$. Les équations

$$(14) \qquad x^i=x^i(\lambda^1,\ldots,\lambda^m), \quad y^i=y^i(\lambda^1,\ldots,\lambda^m), \quad s=s(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)$$

---

[1]) Cf. C. Carathéodory, *Variationsrechnung*, p. 85—87, § 96.

représentent évidemment une multiplicité d'éléments unis qui est de classe C^1 dans un voisinage de V_0 et cette multiplicité est située sur la multiplicité régulière (4). On peut déterminer les fonctions λ^i de façon que la multiplicité (14) soit singulière dans chaque voisinage de V_0. On serait ainsi tenté de croire que toute multiplicité d'éléments unis (de classe C^1) *singulière*, envisagée dans un voisinage suffisamment petit d'un point, est située sur une multiplicité régulière convenable. Or nous construisons une multiplicité singulière de classe C^∞ qui ne jouit pas de cette propriété (§ 5, Exemple 2).

La théorie des multiplicités singulières d'éléments unis ne peut donc être immédiatement rattachée à la théorie des multiplicités régulières.

Le § 7 se rapporte aux transformations canoniques

$$\left.\begin{array}{l} X^i = X^i(x^1, \ldots, y^n) \\ Y^i = Y^i(x^1, \ldots, y^n) \end{array}\right\} \quad (i=1, \ldots, n)$$

c.-à-d. aux transformation vérifiant identiquement les relations

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_{i/1}^{n} (X^i_{x^\alpha} Y^i_{x^\beta} - X^i_{x^\beta} Y^i_{x^\alpha}) = 0 \\ \sum_{i/1}^{n} (X^i_{x^\alpha} Y^i_{y^\beta} - X^i_{y^\beta} Y^i_{x^\alpha}) = \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_{i/1}^{n} (X^i_{y^\alpha} Y^i_{y^\beta} - X^i_{y^\beta} Y^i_{y^\alpha}) = 0 \end{array}\right.$$

($\alpha, \beta = 1, \ldots, n$; $\delta_{\alpha\beta} = 0$ lorsque $\alpha \neq \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 1$ lorsque $\alpha = \beta$).

Les variables x^i, y^i sont maintenant regardées comme indépendantes.

On peut obtenir facilement la solution générale *de classe* C^2 de ce système au moyen d'une certaine fonction arbitraire („erzeugende Funktion"). La démonstration que l'on peut procéder par la même voie pour obtenir toutes les transformations canoniques *de classe* C^1 n'est du tout immédiate.

Une telle démonstration a été réalisé, pour la première fois, par M. CARATHÉODORY [1]). Sa démonstration, bien ingénieuse, n'est pas simple.

En s'appuyant sur le Théorème 1 du § 2 on voit facilement que la construction de la plus générale solution de classe C^1

[1]) Cf. C. Carathéodory, *Variationsrechnung*, p. 78—102.

du système (15) se réduit à la construction de la solution du même genre de l'équation

$$(16) \qquad dS = \sum_{i/1}^{n} (Y^i dX^i - y^i dx^i)$$

et c'est une équation rentrant dans la théorie des multiplicités régulières d'éléments unis. La solution de l'équation (16) et du système (15) n'exige donc pas, au fond, une théorie à part et peut être construite dans une voie élémentaire dont la justification peut se passer de crochets de Poisson qui jouent un rôle important dans les considérations de M. Carathéodory sur ce sujet.

Dans le § 8 nous construisons une solution de classe C^1 de l'équation (16) telle qu'aucune des fonctions X^i, Y^i, S ne possède nulle part aucune dérivée du second ordre. Cet exemple paraît être intéressant pour cette raison que la fonction directrice („erzeugende Funktion") Ω (cf. § 7, Théorème 3) qui decoule immédiatement des fonctions X^i, Y^i, S est forcément de classe C^2. Cet exemple montre aussi que la démonstration du fait que le procédé classique fournit aussi des solution de classe C^1 du système (15) n'est pas stérile, car ce procédé permet de construire des solutions qui ne sont pas de classe C^2.

§ 1. Lemmes préliminaires

Lemme 1. Supposons que les fonctions $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans le carré K

$$a \leqslant u \leqslant a+h, \quad b \leqslant v \leqslant b+h \qquad \textit{(carré K).}$$

Ceci étant supposé on a

$$(1) \qquad \iint\limits_K \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} du\,dv = -\int\limits_K \eta(u,v)\,d\xi(u,v),$$

où l'intégrale curviligne du deuxième membre doit être calculée dans le sens positive sur le contour du carré K.

Nous donnons deux démonstrations de ce lemme. La première, plus longue, est élémentaire, la seconde s'appuie sur un théorème relatif à l'approximation des fonctions par des polynômes.

Première démonstration. Posons pour abréger

(2) $$J=\iint\limits_K \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\,du\,dv.$$

Soit $\varepsilon>0$ un nombre positif quelconque. Divisons le carré K en n^2 carrés partiaux égaux $K_{\mu\nu}$

$$u_\mu \leqslant u \leqslant u_{\mu+1},\quad v_\nu \leqslant v \leqslant v_{\nu+1} \qquad \text{(carré } K_{\mu\nu}\text{)}$$

et désignons par ω

$$\omega=(u_{\mu+1}-u_\mu)(v_{\nu+1}-v_\nu)$$

la valeur commune des aires des $K_{\mu\nu}$. Pour un n suffisamment grand on aura

(3) $$\left| J-\sum_{i/1}^{n}\sum_{i/1}^{n}\omega\cdot\begin{vmatrix}\xi_u(P_{\mu\nu}), & \xi_v(Q_{\mu,\nu})\\ \eta_u(R_{\mu\nu}), & \eta_v(S_{\mu,\nu})\end{vmatrix}\right| \leqslant \varepsilon$$

où $P_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$ désignent quatre points arbitrairement choisis dans le carré $K_{\mu\nu}$ [1]). Posons

(4) $$\Omega_{\mu\nu}=\int\limits_{K_{\mu\nu}}\eta(u,v)\,d\xi(u,v).$$

Nous aurons

(5) $$\int\limits_K \eta\,d\xi=\Sigma\Sigma\Omega_{\mu\nu}.$$

Fixons l'attention sur un carré $K_{\mu\nu}$ quelconque et posons pour abréger

$$u_\mu=\alpha,\quad v_\nu=\beta,\quad u_{\mu+1}=\gamma,\quad v_{\nu+1}=\delta.$$

Nous aurons

$$\omega=(\gamma-\alpha)(\delta-\beta).$$

Nous aurons évidemment

$$\Omega_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}+C_{\mu\nu}+D_{\mu\nu}$$

---

[1]) On sait qu'un tel nombre n existe lorsque les quatre points en question sont identiques. Les dérivées partielles $\xi_u, \xi_v, \eta_u, \eta_v$ étant continues (donc uniformément continues) dans le carré fermé K, il est évident qu'un tel n existe aussi dans le cas où ces points ne sont pas identiques entre eux.

où

$$A_{\mu\nu}=\int_{\alpha}^{\gamma}[\eta(u,\beta)-\eta(u,\delta)]\xi_u(u,\beta)du,$$

$$B_{\mu\nu}=\int_{\beta}^{\delta}[\eta(\gamma,v)-\eta(\alpha,v)]\xi_v(\gamma,v)dv,$$

$$C_{\mu\nu}=\int_{\alpha}^{\gamma}[\xi_u(u,\beta)-\xi_u(u,\delta)]\eta(u,\delta)du,$$

$$D_{\mu\nu}=\int_{\beta}^{\delta}[\xi_v(\gamma,v)-\xi_v(\alpha,v)]\eta(\alpha,v)dv.$$

En intégrant $C_{\mu\nu}$ et $D_{\mu\nu}$ par parties nous obtiendrons les relations

$$C_{\mu\nu}=E_{\mu\nu}+G_{\mu\nu},\quad D_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu},$$

où

$$E_{\mu\nu}=-\int_{\alpha}^{\gamma}[\xi(u,\beta)-\xi(u,\delta)]\eta_u(u,\delta)du,$$

$$F_{\mu\nu}=-\int_{\beta}^{\delta}[\xi(\gamma,v)-\xi(\alpha,v)]\eta_v(\alpha,v)dv,$$

$$G_{\mu\nu}=\{[\xi(u,\beta)-\xi(u,\delta)]\,\eta(u,\delta)\}_{u=\alpha}^{u=\gamma},$$

$$H_{\mu\nu}=\{[\xi(\gamma,v)-\xi(\alpha,v)]\,\eta(\alpha,v)\}_{v=\beta}^{v=\delta}.$$

Nous aurons

(6) $$\Omega_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}+G_{\mu\nu}+H_{\mu\nu}.$$

Nous aurons évidemment

$$A_{\mu\nu}=(\gamma-\alpha)[\eta(\lambda,\beta)-\eta(\lambda,\delta)]\xi_u(\lambda,\beta)=-(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\eta_v(\lambda,\sigma)\xi_u(\lambda,\beta)$$

où λ et σ désignent des nombres convenables ($\alpha\leqslant\lambda\leqslant\gamma$, $\beta\leqslant\sigma\leqslant\delta$). En posant $(\lambda,\beta)=P^1_{\mu\nu}$, $(\lambda,\sigma)=S^1_{\mu\nu}$ nous obtiendrons

$$A_{\mu\nu}=-\omega\xi_u(P^1_{\mu\nu})\,\eta_v(S^1_{\mu\nu}).$$

En appliquant un raisonnement analogue aux expressions $B_{\mu\nu},E_{\mu\nu},F_{\mu\nu}$ nous obtiendrons les relations

(7) $$A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}=-\begin{vmatrix}\xi_u(P^1_{\mu\nu}), & \xi_v(Q^1_{\mu\nu})\\ \eta_u(R^1_{\mu\nu}), & \eta_v(S^1_{\mu\nu})\end{vmatrix}\cdot\omega,$$

(8) $$E_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}=-\begin{vmatrix}\xi_u(P^2_{\mu\nu}), & \xi_v(Q^2_{\mu\nu})\\ \eta_u(R^2_{\mu\nu}), & \eta_v(S^2_{\mu\nu})\end{vmatrix}\cdot\omega.$$

Nous aurons ensuite

$$G_{\mu\nu}+H_{\mu\nu}=(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\left[\frac{\xi(\gamma,\beta)-\xi(\alpha,\beta)}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\eta(\alpha,\delta)-\eta(\alpha,\beta)}{\delta-\beta}-\right.$$
$$\left.-\frac{\xi(\gamma,\delta)-\xi(\gamma,\beta)}{\delta-\beta}\,\frac{\eta(\gamma,\delta)-\eta(\alpha,\delta)}{\gamma-\alpha}\right]$$

et parsuite

$$(9)\qquad G_{\mu\nu}+H_{\mu\nu}=\begin{vmatrix}\xi_u(P^3_{\mu\nu}), & \xi_v(Q^3_{\mu\nu})\\ \eta_u(R^3_{\mu\nu}), & \eta_v(S^3_{\mu\nu})\end{vmatrix}.$$

Tous les points $P^i_{\mu\nu}, Q^i_{\mu\nu}, R^i_{\mu\nu}, S^i_{\mu\nu}$ $(i=1,2,3)$ sont évidemment contenus dans le carré $K_{\mu\nu}$. Nous aurons, en vertu de (5) et (6), la relation

$$\int_K \eta d\xi=\Sigma\Sigma(A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}+G_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})$$

et de là, en raison de (2), (3), (7), (8) et (9), l'inégalité

$$\left|\iint_K\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\,dudv+\int_K\eta d\xi\right|\leqslant\left|J+\Sigma\Sigma(A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu})\right|+$$
$$+|J+\Sigma\Sigma(E_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})|+|-J+\Sigma\Sigma(G_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})|\leqslant 3\varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration.

Deuxième démonstration. Nous démontrerons d'abord la relation (1) sous l'hypothèse accessoire que les fonctions ξ et η possèdent des dérivées partielles du second ordre continues dans le carré K. Posons

$$J_1=\int_a^{a+h}\left[\int_b^{b+h}\xi_u\eta_v dv\right]du,\qquad J_2=-\int_a^{a+h}\left[\int_b^{b+h}\xi_v\eta_u dv\right]du.$$

Nous aurons évidemment (cf. (2)) $J=J_1+J_2$. En intégrant par parties nous obtiendrons

$$J_1=\int_a^{a+h}[\eta(u,b+h)\,\xi_u(u,b+h)-\eta(u,b)\,\xi_u(u,b)]du-$$
$$-\iint_K\eta(u,v)\,\xi_{uv}(u,v)\,dudv,$$

$$J_2=-\int_b^{b+h}[\eta(a+h,v)\,\xi_v(a+h,v)-\eta(a,v)\,\xi_v(a,v)]dv+$$
$$+\iint_K\eta(u,v)\,\xi_{uv}(u,v)\,dudv.$$

En ajoutant ces égalités on obtient la relation (1). Le cas où les fonctions ξ et η possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues dans le carré K peut être ramené au cas précédent. Nous introduisons, à cet effet, une suite de polynômes $\xi^{(n)}(u,v), \eta^{(n)}(u,v)$ telle que l'on ait

$$\xi^{(n)}\to\xi,\quad \eta^{(n)}\to\eta,\quad \xi_u^{(n)}\to\xi_u,\quad \eta_u^{(n)}\to\eta_u,\quad \xi_v^{(n)}\to\xi_v,\quad \eta_v^{(n)}\to\eta_v,$$

la convergence étant uniforme dans le carré K [1]). La formule (1) subsiste pour le polynômes $\xi^{(n)}, \eta^{(n)}$. En passant à la limite $(n\to\infty)$ nous obtiendrons la formule (1) relatives aux fonctions ξ et η.

Lemme 2 (Cas du triangle). Supposons que les fonctions $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ soient de classe C^1 dans un triangle fermé [2]) T. (Ce triangle peut être dégénéré ou non). Posons

$$I(u,v)=\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}.$$

Nous affirmons que l'on a

$$\iint\limits_T I(u,v)\,du\,dv = -\int\limits_T \eta(u,v)\,d\xi(u,v) \tag{10}$$

où l'intégrale curviligne du second membre doit être calculée dans ce sens positif le long du contour du triangle T.

Démonstration. Dans le cas où T est dégénéré, les deux membres de (10) sont nuls. (Nous regardons, dans ce cas, les deux orientations du contour de T comme positives). Supposons donc que T n'est pas dégénéré et désignons par A, B, C les sommets de T. Découpons le triangle en un trapèze Q et un petit triangle t au moyen d'une droite e parallèle au segment (A,B).

Considérons, sur un plan auxiliaire des points (U,V) le carré K dont les sommets se trouvent aux points (0,0), (1,0), (0,1), (1,1). Il est facile de trouver une transformation biunivoque

$$u=\varphi(U,V),\quad v=\psi(U,V)$$

---

[1]) Pour l'existence de telles suites de polynômes v. De la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, Tome II (deuxième édition), Louvain-Paris (1912), p. 126—135.

[2]) „Triangle fermé T" veut dire: intérieur de T + frontière de T.

qui est de classe C^1 dans K, qui fait correspondre Q à K et pour laquelle on a

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(U,V)}>0 \qquad \text{(dans } K\text{)}.$$

Posons

$$\bar{\xi}(U,V)=\xi(\varphi(U,V),\psi(U,V)), \quad \bar{\eta}(U,V)=\eta(\varphi,\psi),$$

$$\bar{I}(U,V)=\frac{D(\bar{\xi},\bar{\eta})}{D(U,V)}.$$

En vertu du lemme précédent nous aurons

$$\iint_K \bar{I}(U,V)\,dU\,dV=-\int_K \bar{\eta}(U,V)\,d\bar{\xi}(U,V).$$

D'une autre part nous aurons évidemment

$$\iint_Q I(u,v)\,du\,dv=\iint_K \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\,\frac{D(\varphi,\psi)}{D(U,V)}\,dU\,dV=$$

$$\iint_K \bar{I}(U,V)\,dU\,dV,$$

$$\int_Q \eta(u,v)\,d\xi(u,v)=\int_K \bar{\eta}(U,V)\,d\bar{\xi}(U,V).$$

En rapprochant les trois relations précédentes on obtiendra l'égalité

$$\iint_Q I(u,v)\,du\,dv=-\int_Q \eta(u,v)\,d\xi(u,v).$$

Si la distance du sommet C à la droite e (parallèle au côté A,B) tend vers 0, le trapèze Q tend vers le triangle T et les deux membres de l'égalité précédente tendent vers les deux membres respectifs de la relation (10), ce qui termine la démonstration.

Lemme 3. Soit Ω un ensemble ouvert situé dans l'espace (à m dimensions) des points $(u^1,\ldots,u^m)$. Supposons que les $2n$ fonctions

(11) $$x^i(u^1,\ldots,u^m),\ y^i(u^1,\ldots,u^m), \qquad (i=1,\ldots,n)$$

soient de classe C^1 dans Ω. Considérons les crochets de Lagrange définis par les formules

$$(12)\qquad [u^\alpha, u^\beta] = \sum_{i/1}^{n} \begin{vmatrix} x^i_{u^\alpha}, x^i_{u^\beta} \\ y^i_{u^\alpha}, y^i_{u^\beta} \end{vmatrix}.$$

Soit T un triangle fermé contenu dans Ω. Supposons que pour chaque point de T [1]) on ait

$$(13)\qquad [u^\alpha, u^\beta] = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, ..., m).$$

Ceci étant supposé on aura

$$(14)\qquad \int_T \sum_{i/1}^{n} y^i(u^1, ..., u^m)\, dx^i(u^1, ..., u^m) = 0.$$

où le premier membre désigne l'intégrale curviligne calculée le long du bord de T dans l'un sens ou dans l'autre.

Démonstration. La relation (14) a évidemment lieu lorsque le triangle T est dégénéré. Nous supposons dans la suite que T n'est pas dégénéré et nous désignons par A, B, C les sommets de T. Désignons par

$$(l^1, ..., l^m),\ (p_1^1, ..., p_1^m),\ (p_2^1, ..., p_2^m)$$

respectivement les coordonnées du point A et des vecteurs $\overline{A,B}$ et $\overline{A,C}$. Les équations

$$(15)\qquad u^\alpha = l^\alpha + \varrho^1 p_1^\alpha + \varrho^2 p_2^\alpha, \qquad (\alpha = 1, ..., m)$$

établissent une transformation biunivoque qui fait correspondre les points (ϱ^1, ϱ^2) d'un plan auxiliaire à ceux du plan du triangle T. Désignons par t le triangle-image de T. Effectuons la substitution (15) dans les fonctions (11). Nous désignerons les fonctions ainsi obtenues par

$$\hat{x}^i(\varrho^1, \varrho^2), \quad \hat{y}^i(\varrho^1, \varrho^2).$$

Nous aurons évidemment

$$(16)\qquad \int_T \sum y^i dx^i = \int_t \sum \hat{y}^i d\hat{x}^i.$$

[1]) Il s'agit de points situées à l'intérieur de T et de ceux qui sont, situées sur les côtés de T.

Posons

$$[\varrho^1, \varrho^2] = \sum_i \begin{vmatrix} \hat{x}^i_{\varrho^1}, \hat{x}^i_{\varrho^2} \\ \hat{y}^i_{\varrho^1}, \hat{y}^i_{\varrho^2} \end{vmatrix}.$$

En vertu du Lemme 2 nous aurons

$$(17) \qquad \int_{\dot{t}} \sum \hat{y}_i d\hat{x}_i = \pm \int_t\int [\varrho^1, \varrho^2]\, d\varrho^1 d\varrho^2.$$

On vérifie facilement que

$$[\varrho^1, \varrho^2] = \sum_i \begin{Vmatrix} x^i_{u^1}, \ldots, x^i_{u^m} \\ y^i_{u^1}, \ldots, y^i_{u^m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u^1_{\varrho^1}, \ldots, u^m_{\varrho^1} \\ u^1_{\varrho^2}, \ldots, u^m_{\varrho^2} \end{Vmatrix}$$

ou bien en raison d'une formule bien connue

$$[\varrho^1, \varrho^2] = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha/1}^{m} \sum_{\beta/1}^{m} \begin{vmatrix} u^\alpha_{\varrho^1}, u^\beta_{\varrho^1} \\ u^\alpha_{\varrho^2}, u^\beta_{\varrho^2} \end{vmatrix} \cdot \sum_{i/1}^{n} \begin{vmatrix} x^i_{u^\alpha}, x^i_{u^\beta} \\ y^i_{u^\alpha}, y^i_{u^\beta} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte en vertu de (12) et (13) que $[\varrho^1, \varrho^2] = 0$ en tout point du triangle t. En rapprochant (16) et (17) on en conclut que la relation (14) a lieu.

§ 2. Théorème fondamental et ces conséquences immédiates

Théorème 1. Supposons que les fonctions:

(1) $\qquad x^i(u^1, \ldots, u^m), \qquad (i = 1, \ldots, n)$

(2) $\qquad y^i(u^1, \ldots, u^m),$

possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans un ensemble ouvert et convexe Ω (situé dans l'espace à m dimension). Considérons les crochets de Lagrange

$$[u^\alpha, u^\beta] = \sum_{i/1}^{n} \begin{vmatrix} x^i_{u^\alpha}, x^i_{u^\beta} \\ y^i_{u^\alpha}, y^i_{u^\beta} \end{vmatrix}.$$

Ceci étant, la condition nécessaire et suffisante afin qu'il existe une fonction

(3) $\qquad S(u^1, \ldots, u^m)$ ou tout court $S(U)$

qui 1° possède des dérivées partielles continues dans Ω et 2° vérifie identiquement dans Ω l'équation

$$(4)\qquad dS(u^1,\dots,u^m)=\sum_{i/1}^{n} y^i(u^1,\dots,u^m)\,dx^i(u^1,\dots,u^m)$$

consiste en ce que les équations

$$(5)\qquad [u^\alpha,u^\beta]=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

soient identiquement vérifiées dans Ω [1]).

L'unique solution de (4), solution qui est valable dans Ω et qui pour un point arbitraire $U_0=(u_0^1,\dots,u_0^m)$ de Ω prend une valeur donnée à l'avance S_0 a la forme

$$(6)\qquad S(U)=S_0+\int_{U_0}^{U}\sum_{i/1}^{n} y^i(U)\,dx^i(U),$$

où l'intégrale du second membre doit être calculée le long du segment rectiligne (U_0,U).

Démonstration. La démonstration est immédiate dans le cas $m=1$. Nous supposerons dans la suite que $m>1$. Nous démontrerons d'abord que notre condition est nécessaire.

Supposons à cet effet que la relation (4) ait lieu dans Ω. Soit

$$U_*=(u_*^1,\dots,u_*^m)$$

un point quelconque de Ω. On a évidemment $[u^\alpha,u^\alpha]\equiv 0$. Il reste à prouver que l'équation

$$(7)\qquad [u^1,u^2]=0$$

est vérifiée au point U^*, car la démonstration relative aux autres équations (5) sera analogue. Soit $h>0$ un nombre suffisamment petit pour que le carré K défini par les relations

$$u_*^1\leqslant u^1\leqslant u_*^1+h,\quad u_*^2\leqslant u^2\leqslant u_*^2+h$$
$$u^\gamma=u_*^\gamma\quad(\gamma=3,\dots,m)$$

---

[1]) L'hypothèse que Ω doit être convexe n'est pas essentielle pour l'existence d'une telle fonction S. Il suffit de supposer que Ω constitue une image homéomorphe de l'intérieur d'une sphère à m dimensions. La démonstration s'appuie, dans ce cas, sur un principe de prolongement analogue à celui dont on se sert dans la démonstration du théorème de monodromie relatif aux fonctions analytiques.

soit situé dans Ω. Désignons par

$$\bar{x}^i(u^1, u^2), \quad \bar{y}^i(u^1, u^2), \quad \bar{S}(u^1, u^2)$$

les fonctions (1), (2) et (3) envisagées pour le point

$$u^1, u^2, u^3_*, \ldots, u^m_*$$

variable dans le carré K. Nous aurons en vertu de (4)

$$\int_K (\Sigma \bar{y}^i d\bar{x}^i) = \int_K d\bar{S} = 0$$

et, par conséquent, en raison du Lemme 1, § 1

$$0 = \int_K \Sigma \bar{y}^i d\bar{x}^i = -\iint_K \sum \begin{vmatrix} \bar{x}^i_{u^1}, \bar{x}^i_{u^2} \\ \bar{y}^i_{u^1}, \bar{y}^i_{u^2} \end{vmatrix} du^1 du^2.$$

L'intégrale double du dernier membre étant nulle pour chaque h positif et suffisamment petit, il en résulte que la relation

$$\sum \begin{vmatrix} \bar{x}^i_{u^1}, \bar{x}^i_{u^2} \\ \bar{y}^i_{u^1}, \bar{y}^i_{u^2} \end{vmatrix} = 0$$

et, par suite, aussi la relation (7) a lieu au point U_*. La condition (5) est donc nécessaire.

Supposons maintenant que la condition (5) est remplie en tout point de Ω et définissons la fonction S par la formule (6). Il s'agit de prouver que la relation (4), ou ce qui revient au même, le système de relations

$$S_{u^\alpha} = \sum_i y^i x^i_{u^\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

a lieu en chaque point U_* de Ω. Par raison de symétrie il suffit de prouver que la relation

$$S_{u^1} = \sum_i y^i x^i_{u^1} \tag{8}$$

a lieu au point U_*. Considérons le point

$$\hat{U} = (\hat{u}^1, u^2_*, \ldots, u^m_*)$$

variable dans Ω. Le triangle T de sommets $U_0, U_*, \hat{U}$ est contenu dans Ω, car Ω est convexe. En s'appuyant sur le Lemme 3 du § 1 on a en vertu de (5) et (6)

$$S(\hat{U})-S(U_*)-\int_{U_*}^{\hat{U}}\sum y^i dx^i=\int_T \sum y^i dx^i=0$$

et par suite

$$S(\hat{U})-S(U_*)=\int_{U_*}^{\hat{U}}\sum y^i dx^i=\int_{u^1_*}^{\hat{u}^1}\sum y^i(u^1,u^2_*,\ldots,u^m_*)x^i_{u^1}(u^1,u^2_*,\ldots,u^m_*)du^1.$$

En divisant cette égalité par $\hat{u}^1-u^1_*$ et en passant à la limite nous voyons que (8) a lieu au point U_*. La condition (5) est donc suffisante.

Soient S_1 et S_2 deux solutions de (4). Nous aurons $d(S_1-S_2)\equiv 0$, d'où il résulte que $S_1-S_2\equiv$ const. Il s'ensuit que la formule (6) présente l'unique solution l'équation de (4), solution qui est valable dans Ω et qui pour $U=U_0$ prend la valeur S_0.

Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème précédent.

Corollaire 1. Supposons que les fonctions (1) et (2) possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans un ensemble ouvert Θ qui n'est pas forcément simplement connexe.

Ceci étant supposé la condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions remplissent le système (5) dans Θ tout entier, consiste en ce qu'à tout point U_* de Θ corresponde une fonction $S(U)$ qui possède des dérivées partielles continue dans un certain voisinage de U_* et qui remplit dans ce voisinage l'équation (4).

Remarque 1. Gardons relativement aux fonctions (1) et (2) les hypothèses du théorème précédent et supposons que l'ensemble ouvert Θ n'est pas simplement connexe. Ceci étant il peut arriver que le système d'équations (5) est rempli dans Θ et qu'il n'existe aucune fonction S de classe C^1 qui vérifie l'équation (4) dans Ω tout entier.

Des exemples de tel genre sont bien connus dans la théorie du potentiel[1]).

Théorème 2. Supposons que les fonctions (1) et (2) soient de classe C^1 dans un ensemble ouvert Θ et qu'elles y remplissent le système (5).

Supposons qu'une transformation (de classe C^1) $T(V)$

$$u^\alpha = \varphi^\alpha(v^1, \ldots, v^p), \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \qquad \text{(transf. } T(V))$$

transforme un ensemble ouvert F, situé dans l'espace à p dimensions, en une partie de l'ensemble Θ. Posons

$$\bar{x}^i(V) = x^i(T(V)), \quad \bar{y}^i(V) = y^i(T(V)).$$

Nous affirmons que les fonctions $\bar{x}^i(V)$, $\bar{y}^i(V)$ remplissent dans F les équations

$$(9) \qquad \sum_{i/1}^{n} (\bar{x}^i_{v^\gamma} \bar{y}^i_{v^\delta} - \bar{x}^i_{v^\delta} \bar{y}^i_{v^\gamma}) = 0 \qquad (\gamma, \delta = 1, \ldots, p)$$

ou tout court les équations

$$[v^\gamma, v^\delta] = 0.$$

Démonstration. Soit V_0 un point quelconque de F et soit $U_0 = T(V_0)$ son image par intermédiaire de la transformation $T(V)$. Désignons par Ω un voisinage convexe de U_0, voisinage qui est contenu dans Θ. En vertu du Théorème 1 il existe une fonction $S(U)$ de classe C^1 qui vérifie, dans ce voisinage l'équation

$$dS = \sum y^i dx^i.$$

---

[1]) Désignons, pour simplifier, les fonctions x^1, x^2, y^1, y^2 respectivement par x, y, p, q et les variables u^1, u^2 par u, v. Les fonctions

$$x = u, \quad y = v, \quad p = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad q = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

constituent une solution du système (5) (qui se réduit dans ce cas à une seule équation $[u, v] = 0$), solution valable dans $\Omega =$ plan (u, v) tout entier à l'exception de l'origine. On sait qu'il n'existe aucun fonction $S(u, v)$ de classe C^1 vérifiant dans Ω tout entier l'équation $dS(u, v) = p dx + q dy$. La fonction $S(u, v) = \operatorname{arctg}(v/u)$ ne vérifie cette équation que dans le demi-plan $u > 0$ et dans le demi-plan $u < 0$.

Posons $\bar{S}(V)=S(T(V))$. L'équation

$$d\bar{S}=\sum \bar{y}^i d\bar{x}_i$$

sera évidemment vérifiée dans un voisinage de V_0. Il en résulte, en vertu du Théorème 1 que les équations (9) seront vérifiées dans ce voisinage et en particulier au point V_0, c. q. f. d.

Remarque 2. Les résultats du présent paragraphe montrent que l'examen de l'équation (4) est équivalent à l'examen du système (5).

Le Théorème 1 peut être étendu au cas où les fonctions (1) et (2) sont de classe C^i $(i>1)$ dans l'ensemble convexe Ω. Dans ce cas la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction S de classe C^i vérifiant (4) dans Ω consiste en ce que les fonctions (1) et (2) remplissent le système (5) dans Ω.

§ 3. Transformations canoniques élémentaires. Suites principales de fonctions

Définition 1. Considérons les transformations des trois types suivants E_1, E_2, E_3, transformations qui font correspondre aux points de l'espace à $2n$ dimensions

$$x^1, \ldots, x^n, \quad y^1, \ldots, y^n$$

les points

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \quad \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n.$$

Voici leurs définitions.

Transformations E_1. Ce sont les transformations de la forme

$$(E_1) \qquad \bar{x}^i = x^{q^i}, \quad \bar{y}^i = y^{q^i} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

où la suite $q^1, \ldots, q^n$ représente une permutation quelconque des nombres $1, \ldots, n$. Cette transformation consiste donc en ce que l'on effectue le même changement d'ordre des éléments dans la suite $x^1, \ldots, x^n$ et dans la suite $y^1, \ldots, y^n$. La transformation identique est évidemment la plus simple transformation du type E_1. Les *transformations* E_2 sont définies par les formules

$$(E_2) \quad \begin{cases} \bar{x}^i = -y^i, \ \bar{y}^i = x^i & \text{pour certains indices } k^1, \ldots, k^r \\ \bar{x}^i = x^i, \quad \bar{y}^i = y^i & \text{pour les autres indices.} \end{cases}$$

Enfin les *transformations* E_3 sont de la forme

$$(E_3) \quad \begin{cases} \bar{x}^i = y^i, \ \bar{y}^i = -x^i & \text{pour certains indices } k^1, \ldots, k^r \\ \bar{x}^i = x^i \ \ \bar{y}^i = y^i & \text{pour les autres indices.} \end{cases}$$

Chaque transformation que l'on obtient en effectuant successivement un nombre fini de transformations des trois types précédents sera appelée *transformation élémentaire.* (Chaque transformation de cette sorte est canonique (cf. Définition 1 et § 7, Remarque 1). Voici quelques propriétés évidentes des transformations élémentaires.

Propriété 1. La transformation inverse d'une transformation élémentaire est aussi élémentaire. La classe de toutes les transformations élémentaires forme un groupe de transformations.

Propriété 2. Supposons que les formules

$$(1) \qquad \bar{x}^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n), \quad \bar{y}^i = \psi^i(x^1, \ldots, x^n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

représentent une transformation élémentaire. Considérons une suite de fonctions

$$(2) \qquad x^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^m), \quad y^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, y^n(u^1, \ldots, u^m)$$

et désignons par

$$(3) \qquad \bar{x}^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, \bar{x}^n(u^1, \ldots, u^m), \quad \bar{y}^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, \bar{y}^n(u^1, \ldots, u^m)$$

l'image de la suite (2) par l'intermédiaire de la transformation (1). Supposons enfin qu'en un point U_0 on ait

$$\sum_i x^i_{u^\alpha} y^i_{u^\beta} - x^i_{u^\beta} y^i_{u^\alpha} = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m).$$

Ceci étant on aura au point U_0 les égalités

$$\sum_i \bar{x}^i_{u^\alpha} \bar{y}^i_{u^\beta} - \bar{x}^i_{u^\beta} \bar{y}^i_{u^\alpha} = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Définition 2. Suite principale. Une suite de fonctions

$$(4) \qquad x^{i_1}, \ldots, x^{i_a}, \quad y^{j_1}, \ldots, y^{j_b}$$

choisie dans la suite (2) sera appelée *principale*, si la suite d'indices

$$i_1, \ldots, i_a, \quad j_1, \ldots, j_b$$

est composée de nombres différents entre eux, ou ce qui revient au même, si les fonctions de la suite (4) figurent dans $a+b$ colonnes *différentes* de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x^1,\ldots,x^n \\ y^1,\ldots,y^n \end{Vmatrix}.$$

Nous supposons évidemment que $a+b>0$ sans exclure cependant les cas $a=0$ et le cas $b=0$. On a évidemment $a+b\leqslant n$, ou, ce qui revient au même, on a la propriété suivante:

Propriété 3. Le nombre d'éléments de toute suite principale (relativement à la suite (2)) est au plus égal à n c.-à-d. à la moitié du nombre d'éléments de la suite (2).

Propriété 4. Chaque suite principale

$$(5) \qquad x^1,\ldots,x^p, \quad x^{k_1},\ldots,x^{k_q}, \quad y^{l_1},\ldots,y^{l_r}$$

peut être transformée au moyen d'une transformation élémentaire convenable en la suite

$$\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^p, \quad \bar{x}^{p+1},\ldots,\bar{x}^{p+q}, \quad \bar{x}^{p+q+1},\ldots,\bar{x}^{p+q+r}.$$

Cette transformation élémentaire peut être choisie d'une telle façon que l'on ait

$$\bar{x}^1\equiv x^1,\ldots,\bar{x}^p\equiv x^p, \quad \bar{y}^1\equiv y^1,\ldots,\bar{y}^p\equiv y^p.$$

Il existe, en particulier, une transformation élémentaire qui transforme la suite principale

$$(6) \qquad x^{k_1},\ldots,x^{k_q}, \quad y^{l_1},\ldots,y^{l_r}$$

en la suite

$$\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^q, \quad \bar{x}^{q+1},\ldots,\bar{x}^{q+r}.$$

La présente propriété continue d'être vraie lorsque l'on y remplace les lettres x par y et y par x. Il existe donc une transformation élémentaire qui transforme la suite (6) en la suite

$$\bar{y}^1,\ldots,\bar{y}^q, \quad \bar{y}^{q+1},\ldots,\bar{y}^{q+r}.$$

Propriété 5. Chaque suite principale peut être transformée (au moyen d'une transformation élémentaire convenable) en chaque suite principale donnée à l'avance et renfermant le même nombre d'éléments.

Propriété 6. L'ordre de la matrice jacobienne de la suite (5) c.-à-d. de la matrice

$$\left\| \frac{D(x^1,\dots,x^p,x^{k_1},\dots,x^{k_q},y^{l_1},\dots,y^{l_r})}{D(u^1,\dots,u^m)} \right\|$$

ne change pas lorsque l'on soumet la suite principale (5) à une transformation élémentaire quelconque.

Propriété 7. Le jacobien de chaque transformation élémentaire est égal à $+1$.

La vérification de cette propriété est immédiate.

§ 4. Une propriété de la matrice jacobienne des solutions du système $[u^\alpha, u^\beta]=0$

Théorème 1. Posons pour abréger $U=(u^1,\dots,u^m)$ et $U_0=(u_0^1,\dots,u_0^m)$. Supposons que les relations

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}-\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\right)=0 \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

c.-à-d. les relations

$$[u^\alpha, u^\beta]=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m) \tag{1}$$

soient remplies au point U_0. Supposons en plus qu'une suite principale

$$x^{i_1},\dots,x^{i_a},\ \ y^{j_1},\dots,y^{j_b} \tag{2}$$

soit compososée de fonctions indépendantes[1]) au point U_0.

Ceci étant supposé nous affirmons que la suite (2) peut être complétée de façon à obtenir une suite *principale* dont le nombre d'éléments est égal à l'ordre de la matrice $\|M\|$ suivante

$$\|M\|=\left\|\frac{D(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|_{U=U_0} \tag{3}$$ [2])

---

[1]) c.-à-d. l'ordre de la matrice $\left\|\frac{D(x^{i_1},\dots,x^{i_a},y^{j_1},\dots,y^{j_b})}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|$ est égal à $a+b$ au point $U=U_0$.

[2]) On remarquera l'analogie de ce théorème avec un théorème relatif au transformations canoniques (cf. C. Carathéodory, *Variationsrechnung* (1935), § 96, p. 85.

Il en résulte en particulier que l'ordre de la matrice (3) ne peut pas surpasser n (cf. § 3, Propriété 3).

Démonstration. Il suffit évidemment de se borner au cas $u_0^1 = u_0^2 = \ldots = u_0^n = 0$ [1]). Il suffit aussi d'admettre (ce que nous supposons dans la suite) que les fonctions x^i et y^i sont des polynômes homogènes de degré 1 [2]).

Pour ces polynomes on aura évidemment les identités

$$(4) \qquad \sum_{i/1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta} - \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \right) \equiv 0.$$

En appliquant une transformation élémentaire convenable on pourra (§ 3, Propriété 4) remplacer la suite (2) par une suite principale de la forme $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{a+b}$. Cette transformation n'altèrera pas ni l'indépendance des fonctions (2), ni l'ordre de la matrice (3), ni l'identité (4) (cf. § 3, Propriétés 6 et 2). Posons

$$c = a + b.$$

Nous voyons donc (cf. § 3, Propriété 1) qu'il suffit de se borner au cas où la suite (2) a la forme

$$(5) \qquad x^1, \ldots, x^c.$$

Considérons toutes les suites partielles de la suite

$$x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots y^n$$

lesquelles suites partielles 1° englobent la suite (5), 2° sont principales, 3° sont composées de polynômes indépendants.

La plus nombreuse de telles suites contiendra un nombre d'éléments que nous désignerons par

$$c + e.$$

---

[1]) Il suffira, à cet effet, d'introduire de nouvelles variables indépendantes $v^\alpha = u^\alpha - u_0^\alpha$.

[2]) Il suffit, à cet effet, de remplacer les fonctions x^i et y^i par des polynômes ξ^i et η^i telles que l'on ait $\xi^i_{u^\alpha}(U) \equiv x^i_{u^\alpha}(U_0)$, $\eta^i_{u^\alpha}(U) \equiv y^i_{u^\alpha}(U_0)$.

Nous pouvons supposer que cette suite a la forme

$$(6) \qquad x^1, \ldots, x^c, x^{c+1}, \ldots, x^{c+e}$$ [1]).

En vertu de la définition de cette suite il existe des constantes A_{kh}, B_{kh} telles que

$$(7) \qquad x^k = \sum_{h/1}^{c+e} A_{kh} x^h, \quad y^k = \sum_{h/1}^{c+e} B_{kh} x^h, \qquad (k = c+e+1, \ldots, n).$$

Les polynômes (6) étant indépendants on peut supposer (en changeant, au besoin, l'ordre de variables $u^1, \ldots, u^m$) que

$$(8) \qquad \frac{D(x^1, \ldots, x^{c+e})}{D(u^1, \ldots, u^{c+e})} \neq 0.$$

Il résulte des identités (4) que

$$(9) \qquad \sum_{i/1}^{n} (x^i dy^i - y^i dx^i) \equiv 0$$ [2])

c.-à-d.

$$(10) \qquad \sum_{h/1}^{c+e} (x^h dy^h - y^h dx^h) + \sum_{k/c+e+1}^{n} (x^k dy^k - y^k dx^k) \equiv 0.$$

Rémplaçons, dans cette identité, les dx^k et dy^k par leurs valeurs obtenues de (7). Nous obtiendrons

$$(11) \qquad \sum_{l/1}^{c+e} z^l dx^l \equiv \sum_{h/1}^{c+e} x^h dy^h$$

où

$$(12) \qquad z^l \equiv y^l + \sum_{k/c+e+1}^{n} (-B_{kl} x^k + A_{kl} y^k), \qquad (l = 1, \ldots, c+e).$$

---

[1]) En effet: chaque suite contenant $c+e$ polynômes et jouissant des propriétés 1°, 2°, 3° pourra être transformées en la suite (6) au moyen d'une transformation élémentaire convenable (cf. § 3, Propriété 5). Les propriétés 2° et 3° sont invariantes relativement à une telle transformation.

[2]) x^i et y^i étant des polynômes homogènes du premier degré on a: $x^i \equiv \sum_{\alpha/1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u^\alpha$, $y^i \equiv \sum_{\beta/1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta} u^\beta$. Il s'ensuit que $\sum (x^i dy^i - y^i dx^i) \equiv$ $\equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [u^\alpha, u^\beta] u^\beta d u^\alpha$, ce qui est identiquement nul (cf. (4)).

En vertu de (11) on aura

$$(13)\qquad \sum_{l/1}^{c+e} z^l \frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha} \equiv \sum_{h/1}^{c+e} x^h \frac{\partial y^h}{\partial u^\alpha}, \qquad (\alpha=1,\dots,c+e).$$

Les dérivées $\frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial y^h}{\partial u^\alpha}$ étant constantes, il en résulte en vertu de (8) et (13) que les z^l sont des combinaisons linéaires (aux coefficients constants) des $x^1,\dots,x^{c+e}$

$$z^l \equiv \sum_{h/1}^{c+e} E_{lh} x^h, \qquad (l=1,\dots,c+e)$$

d'où, en vertu de (12), on obtient

$$y^l \equiv \sum_{k/c+e+1}^{n} (B_{kl}x^k - A_{kl}y^k) + \sum_{h/1}^{c+e} E_{lh}x^h$$

et ceci rapproché des identités (7) conduit à la conclusion que polynômes y^l $(l=1,\dots,c+e)$ sont des combinaisons linéaires des polynômes (6). Les polynômes x^k et y^k $(k=c+e+1,\dots,n)$ étant aussi des combinaisons linéaires des polynômes (6) (cf. (7)), nous voyons que la démonstration de notre lemme se trouve terminée.

Voici encore un corollaire résultant immédiatement du théorème précédent

Corollaire 1. Supposons que les relations (1) soient remplies au point U_0 et supposons que le rang r de la matrice (3) n'est pas nul. Ceci étant supposé il existe une suite principale

$$x^{i_1},\dots,x^{i_k},\ y^{j_1},\dots,y^{j_l}$$

composée de r fonctions $(r=k+l)$ qui sont indépendantes au point U_0, ou, autrement dit, telles que le rang de la matrice

$$\left\| \frac{D(x^{i_1},\dots,x^{i_k},\ y^{j_1},\dots,y^{j_l})}{D(u^1,\dots,u^m)} \right\|_{U=U_0}$$

est égal à $r=k+l$.

§ 5. Solutions régulières du système $[u^\alpha, u^\beta]=0$ et de l'équation $dS=\sum y^i dx^i$

Définition 1. La suite de fonctions

$$x^1(u^1,\dots,u^m),\dots,x^n(u^1,\dots,u^m),\ y^1(u^1,\dots,u^m),\dots,y^n(u^1,\dots,u^m) \tag{1}$$

qui remplissent, dans un ensemble ouvert Ω, le système d'équations

$$\sum_{i/1}^{n} (x^i_{u^\alpha} y^i_{u^\beta} - x^i_{u^\beta} y^i_{u^\alpha})=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m) \tag{2}$$

sera appelée *solution régulière* du système (2) lorsque les fonctions (1) sont de classe C^1 dans Ω et lorsque l'ordre de la matrice jacobienne

$$\left\| \frac{D(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)}{D(u^1,\dots,u^m)} \right\|$$

est égal à m en chaque point de Ω.

Remarque 1. Supposons que la suite (1) représente une solution régulière (dans Ω) du système (2). Ceci étant le nombre de variables indépendantes $u^1,\dots,u^m$ ne peut pas surpasser la moitié du nombre des fonctions figurant dans la suite (1). Autrement dit on a $m\leqslant n$.

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1 du § 4.

Remarque 2. Nous allons indiquer deux sortes de transformations par l'intermédiaire desquelles chaque solution régulière (1) se transforme en une solution régulière. Les transformations de la première sorte seront appliquées aux suites de *fonctions* (1) et fournirons de nouvelles suites de fonctions. Les transformations de la deuxième sorte seront effectuées sur les *variables indépendantes* $u^1,\dots,u^m$.

Supposons d'abord que la suite (1) représente une solution régulière (dans Ω) du système (2). Ceci étant, chaque suite de fonctions résultant de la suite (2) par l'intermédiaire d'une transformation canonique élémentaire quelconques (appliquée aux variables $x^1,\dots,y^n$) représentera une solution régulière (dans Ω) du système (2).

C'est une conséquence immédiate de la définition des transformations élémentaires (§ 3) et des Propriétés 2 et 6 (§ 3).

Gardons l'hypothèse que la suite (1) est une solution régulière (dans Ω) du système (2) et supposons que la transformation

$$u^\alpha = \lambda^\alpha(v^1, \ldots, v^m), \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

est de classe C^1 dans un ensemble ouvert ω, qu'elle transforme ω en une partie de Ω et que l'on ait, en chaque point de ω

$$\frac{D(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)}{D(v^1,\ldots,v^m)} \neq 0.$$

Ceci étant la suite de fonctions

$$\hat{x}^i(v^1,\ldots,v^m) = x^i(\lambda^1,\ldots,\lambda^m); \quad \hat{y}^i(v^1,\ldots,v^m) = y^i(\lambda^1,\ldots,\lambda^m)$$

représente une solution régulière (dans ω) du système

$$\sum_{i/1}^{n} \hat{x}^i_{v^\alpha}\hat{y}^i_{v^\beta} - \hat{x}^i_{v^\beta}\hat{y}^i_{v^\alpha} = 0, \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,m).$$

Cette remarque découle facilement du Théorème 2 du § 2.

Théorème auxiliaire 1 sur certaines solutions régulières du système (2). Nous chercherons toutes les solutions (1) du système (2), solutions qui sont de classe C^1 dans un ensemble ouvert et convexe Ω et qui remplissent, dans Ω, les identités

(3) $$x^j(u^1,\ldots,u^m) \equiv u^j, \qquad (j=1,\ldots,m).$$

L'existence de telles solutions n'est possible (cf. (3)) que dans le cas $m \leqslant n$, ce que nous supposons dans la suite. Chaque solution de cette sorte est évidemment régulière [1]).

En d'autres termes: nous chercherons la solution générale (de classe C^1) valable dans Ω du système d'équations

(4) $$\begin{cases} \sum_{i/1}^{n} (x^i_{u^\alpha}y^i_{u^\beta} - x^i_{u^\beta}y^i_{u^\alpha}) = 0, & (\alpha,\beta=1,\ldots,m) \\ x^j = u^j, & (j=1,\ldots,m). \end{cases}$$

Ce système peut être, évidemment, écrit sous la forme

(4bis) $$y^\alpha_{u^\beta} - y^\beta_{u^\alpha} + \sum_{k/m+1}^{n} (x^k_{u^\alpha}y^k_{u^\beta} - x^k_{u^\beta}y^k_{u^\alpha}) = 0.$$

---

[1]) Car $\dfrac{D(x^1,\ldots,x^m)}{D(u^1,\ldots,u^m)} \equiv 1 \neq 0.$

Il y aura deux cas à distinguer:

Cas 1. $m<n$. Nous affirmons que la solution régulière la plus générale de (4) ou (4 bis) peut être obtenue de la façon suivante. Nous choisissons d'une façon quelconque les fonctions

$$(5)\qquad \begin{cases} x^{m+1}(u^1,\dots,u^m),\dots,x^n(u^1,\dots,u^m),\\ y^{m+1}(u^1,\dots,u^m),\dots,y^n(u^1,\dots,u^m),\end{cases}$$

et la fonction auxiliaire

$$(6)\qquad S(u^1,\dots,u^m)$$

pourvu qu'elles soient de classe C^1 dans Ω et qu'elles jouissent, en plus, d'une régularité supplémentaire consistant en ce que les différences

$$(7)\qquad S_{u^j}-\sum_{k/m+1}^{n} y^k x^k_{u^j}, \qquad (j=1,\dots,m)$$

soient aussi de classe C^1 dans Ω [1]. Nous posons ensuite

$$(8)\qquad y^j=S_{u^j}-\sum_{k/m+1}^{n} y^k x^k_{u^j}, \qquad (j=1,\dots,m).$$

Cas 2. $m=n$. Le système (4 bis) prend, dans ce cas, la forme

$$(9)\qquad y^\alpha_{u^\beta}-y^\beta_{u^\alpha}=0 \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,n).$$

Dans ce cas la solution régulière générale de ce système peut être obtenue de la façon suivante. Nous choisissons la fonction auxiliaire S d'une façon quelconque pourvu qu'elle soit de classe C^2 dans Ω et nous posons

$$y^i=S_{u^i}, \qquad (i=1,\dots,n).$$

---

[1] Il suffit à cet effet que les fonctions S et x^k $(k=m+1,\dots,n)$ soient de classe C^2 dans Ω, car toutes les fonctions fonctions x^i, y^i sont, par hypothèse, de classe C^1. Voici un exemple montrant que les différences (7) peuvent être de classe C^2 sans que S et x^k $(k=m+1,\dots,n)$ soient de classe C^2. Nous posons $n=2$, $m=1$. Désignons par $\varphi(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ et ne possédant pas de dérivée pour aucune valeur de t. (Une telle fonction existe v. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, p. 590). Soit $F(t)$ une fonction pour laquelle on a $F'(t)\equiv\varphi(t)$. Posons $x^1(u^1)\equiv u^1$, $y^1(u^1)\equiv 0$, $x^2(u^1)=F(u^1)$, $y^2(u^1)\equiv 1$, $S(u^1)\equiv F(u^1)$. Nous voyons que la différence (7) $(j=1)$ est identiquement nulle donc de classe C^1, que l'équation (8) est identiquement vérifiée et que cependant les fonctions $x^2(u^1)$, $S(u^1)$ ne possèdent nulle part la dérivée du second ordre.

Démonstration. *Cas 1.* Choisissons les fonctions (5) et (6) de la façon indiquée plus haut et définissons les fonctions y^j par les formules (8) et les fonctions x^j par les formules (3). Nous vérifions immédiatement que l'identité

$$dS = \sum_{i/1}^{n} y^i dx^i \tag{10}$$

est remplie dans Ω tout entier. Il en résulte en vertu du Théorème 1 du § 2 que les fonctions (1), remplissent, dans Ω, le système (2) ou, ce qui revient au même, le système (4). Nous voyons donc que chaque suite de fonctions (1) construite par le procédé de notre théorème représente une solution de classe C^1 du système (4), solution valable dans Ω.

Il reste à prouver que toute solution de cette espèce peut être obtenue par le procédé en question. Supposons, à cet effet, que les fonctions (1) soient de classe C^1 dans Ω et qu'elles y remplissent le système (4). Il en résulte, en vertu du Théorème 1 du § 2, qu'il existe une fonction S qui est de classe C^1 dans Ω et qui y remplit l'identité (10) ou, ce qui revient au même dans notre cas, l'identité

$$dS = \sum_{j/1}^{m} y^j du^j + \sum_{k/m+1}^{n} y^k dx^k.$$

De là nous déduisons les identités

$$S_{u^j} = y^j + \sum_{k/m+1}^{n} y^k x^k_{u^j} \qquad (j=1,\dots,m) \tag{10}$$

ce qui prouve que les relations (8) seront identiquement vérifiées dans Ω. Les fonctions y^j étant, par hypothèse, de classe C^1 dans Ω, il résulte des relations (8) que les expressions (7) sont aussi de classe C^1 dans Ω. Ceci prouve que chaque solution du système (4), solution (valable dans Ω) qui est de classe C^1 dans Ω peut être obtenue par le procédé presenté plus haut.

Cas 2. La démonstration est tout à fait analogue.

Remarque 3. Il résulte du théorème précédent que la solution générale (de classe C^1) du système (4) est parfaitement déterminée par les $2(n-m)+1$ fonctions arbitraires (5) et (6) qui sont de classe C^1 et qui jouissent en plus de la régularité supplémentaire mentionnée plus haut.

Interprétation géométrique. Considérons, dans l'espace à $n+1$ dimensions (nous désignerons les points de cet espace par $X^1,...,X^n,T$) une multiplicité ponctuelle à m dimensions W dont la représentation paramétrique a la forme

$$(11)\qquad X^i=x^i(u^1,...,u^m),\quad (i=1,...,n),\quad T=S(u^1,...,u^m)$$

et supposons que les fonctions $x^1(u^1,...,u^m),...,x^m(u^1,...,u^m)$ remplissent les identité (3) ou, ce qui revient au même, que les paramètres $u^1,...,u^m$ coincident avec les variables $X^1,...,X^m$. Le système de relations (8) (qui est équivalent à la relation (10)) exprime évidemment que le plan (à n dimensions)

$$(12)\qquad T-S(u^1,...,u^m)=\sum_{i/1}^{n}y^i(u^1,...,u^m)(X^i-x^i(u^1,...,u^m))$$

est tangent à la multiplicité W au point

$$x^1(u^1,...,u^m),...,x^n(u^1,...,u^m),\quad S(u^1,...,u^m).$$

Le sens géométrique du procédé fournissant la solution générale (de classe C^1) du système (4) est donc le suivant: On choisit d'abord la multiplicité ponctuelle W (de classe C^1) arbitrairement. On subordonne ensuite, d'une façon tout à fait arbitraire, à chaque point de la variété W un plan à n dimensions (12) tangent à W en ce point. Les coefficients angulaires y^i de ce plan et les fonctions $x^i(u^1,...,u^m)$ intervenant dans les équations (11) de la variété W représentent la solution générale du système (4).

Cette méthode et cette interprétation est bien connue depuis longtemps. Ce qui est nouveau, ce sont les conditions nécessaires et suffisantes de régularité, indiquées plus haut, qu'il convient d'adopter relativement aux fonctions „arbitrairement" choisies pour obtenir la solution générale (de classe C^1) du système (4). On remarquera que le Théorème 1 du § 2 est essentiel pour la justification de cette méthode dans les hypothèses du Théorème auxiliaire 1.

Théorème 2. Afin d'éviter la collision des notations désignons les variables indépendantes par

$$w^1,...,w^m$$

et les fonctions inconnues par

$$\hat{x}^i(w^1,\ldots,w^m),\ \hat{y}^i(w^1,\ldots,w^m) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Le système (2) prendra alors la forme

$$(13) \qquad \sum_{i/1}^{n}(\hat{x}^i_{w^\alpha}\hat{y}^i_{w^\beta}-\hat{x}^i_{w^\beta}\hat{y}^i_{w^\alpha})=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,m).$$

Soit

$$(14) \qquad W_0=(w_0^1,\ldots,w_0^m)$$

un point quelconque de l'espace à m dimensions.

Nous affirmons que la solution régulière [1]) la plus générale [2]) du système (13), solution valable dans un voisinage (suffisamment petit) du point W_0 pourra être obtenue par la méthode suivante:

Nous construisons d'abord une solution (de classe C^1) quelconque

$$(15) \qquad x^i(u^1,\ldots,u^m),\ y^i(u^1,\ldots,u^m), \qquad (i=1,\ldots,n)$$

du système (4), solution valable dans un voisinage d'un point U_0. (La méthode de construction de la plus générale solution (15) du système (4) est présentée dans l'énoncé du théorème précédent).

Nous prenons ensuite une transformation arbitraire

$$(16) \qquad u^\gamma=\lambda^\gamma(w^1,\ldots,w^m), \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

qui est de classe C^1 dans un voisinage de W_0, qui transforme le point W_0 en U_0 et dont le jacobien est non nul au point W_0.

Cette transformation transforme la suite (15) en une suite de fonctions que nous désignons par

$$(17) \qquad \bar{x}^i(w^1,\ldots,w^m),\ \bar{y}^i(w^1,\ldots,w^m), \qquad (i=1,\ldots,n).$$

En soumettant les fonctions (17) à une transformation (canonique) élémentaire [3]) quelconque nous obtiendrons la suite de fonctions

$$(18) \qquad \hat{x}^i(w^1,\ldots,w^m), \hat{y}^i(w^1,\ldots,w^m), \qquad (i=1,\ldots,n).$$

---

[1]) Cf. la définition d'une telle solution à la page 81.

[2]) Cf. la note au bas de la page 87.

[3]) Cf. la définition de telles transformations à la page 74.

Cette suite constitue la solution régulière la plus générale du système (13), solution valable dans un voisinage suffisamment petit du point W_0 [1]).

Démonstration. En s'appuyant sur la Remarque 2 nous voyons facilement que la suite (18) représente une solution régulière du système (13), solution qui est valable dans un voisinage suffisamment petit de W_0.

La méthode de notre théorème fournit donc toujours des solutions régulières du système (13) valables dans un voisinage de W_0.

Il reste à démontrer que toutes les solutions régulières en question peuvent être obtenues au moyen de cette méthode.

Supposons à cet effet qu'une suite de fonctions

$$\hat{x}^i(w^1,...,w^m),\ \hat{y}^i(w^1,...,w^m), \qquad (i=1,...,n) \tag{20}$$

représente une solution du système (13), solution qui est régulière au voisinage du point W_0 (cf. la Définition 1 à la page 81).

Les fonctions (20) sont donc de classe C^1 au voisinage de W_0 et le rang de la matrice

$$\left\| \frac{D(\hat{x}^1,...,\hat{x}^n,\hat{y}^1,...,\hat{y}^n)}{D(u^1,...,u^m)} \right\|$$

est égal à m au voisinage de ce point. La suite (20) contient donc (cf. § 4, Corollaire 1) une suite partielle principale de m fonctions indépendantes au voisinage de W_0

$$\hat{x}^{i_1},...,\hat{x}^{i_k},\ \hat{y}^{j_1},...,\hat{y}^{j_l} \qquad (k+l=m). \tag{21}$$

---

[1]) Nous entendons par cela que les deux propriétés suivantes ont lieu:

1°) Chaque suite de fonctions (18) obtenue par le procédé, qui vient d'être indiqué, constitue, dans un voisinage suffisamment petit du point W_0, une solution régulière du système (13).

2°) Soit

$$\widetilde{x}^i(w^1,...,w^m), \widetilde{y}^i(w^1,...,w^m), \qquad (i=1,...,n) \tag{19}$$

une solution du système (13), solution qui est régulière dans un voisinage de W^0. Ceci étant on peut choisir une solution (15) du système (4), une transformation (16) et une transformation élémentaire d'une telle façon que les suites (18) et (19) soient identiques dans un voisinage suffisamment petit de W_0.

En appliquant à la suite de fonctions (20) une transformation élémentaire E convenable on obtiendra une suite

$$\bar{x}^i(w^1,...,w^m),\ \bar{y}^i(w^1,...,w^m) \qquad (i=1,...,n) \tag{22}$$

et on pourra s'arranger d'une telle façon (cf. § 3, Propriété 4) que la suite (21) se transforme en la suite

$$\bar{x}^1(w^1,...,w^m),...,\bar{x}^m(w^1,...,w^m). \tag{23}$$

Le déterminant

$$\frac{D(\bar{x}^1,...,\bar{x}^m)}{D(w^1,...w^m)}$$

sera non nul au voisinage de W_0 (cf. § 3, Propriété 6). La suite (22) représentera une solution, régulière au voisinage de W_0, du système (13) (cf. § 5, Remarque 2).

Appliquons maintenant aux variables indépendantes $w^1,...,w^m$ la transformation T inverse à celle qui est définie par les formules

$$u^\gamma=\bar{x}^\gamma(w^1,...,w^m), \quad (\gamma=1,...,m) \quad \text{(transformation } T^{-1}\text{)}.$$

Désignons par U_0 l'image de W_0 par l'intermédiaire de la transformation T.

La suite (22) passera, par l'intermédiaire de T, en une suite

$$x^i(u^1,...,u^m),\ y^i(u^1,...,u^m), \qquad (i=1,...,n) \tag{24}$$

qui constituera une solution régulière (au voisinage de U_0) du système (2) (cf. § 5, Remarque 2) et aussi une solution de classe C^1 du système (4)[1]).

Faisons maintenant le chemin inverse. Partons des fonctions (24). Appliquons aux variables indépendantes $u^1,...,u^m$ la transformation T^{-1}. Nous obtiendrons alors la suite (23). En appliquant aux fonctions de cette suite la transformation E^{-1} (qui est élémentaire, cf. § 3, Propriété 1) nous obtiendrons la suite (20). Nous pouvons donc obtenir la solution (20), envisagée dans un voisinage suffisament petit de W_0, par le procédé indiqué dans notre théorème.

---

[1]) Ceci résulte de la forme de la transformation T. En vertu de la définition de cette transformation on aura évidemment $x^j(u^1,...,u^m)\equiv u^j$, $(j=1,...,m)$.

Construction de la plus générale (au sens local) multiplicité régulière d'élements unis

Définition 2. Soit

(25) $x^i = x^i(u^1,\dots,u^m)$, $S = S(u^1,\dots,u^m)$, $y^i = y^i(u^1,\dots,u^m)$ $(i=1,\dots,n)$

une multiplicité d'éléments de contact (cf. l'Introduction, p. 56). On dira que cette multiplicité est une *multiplicité d'éléments de contact unis* définie dans un ensemble Ω de points $(u^1,\dots,u^m)$ lorsqre les fonctions

(26) $$x^i(u^1,\dots,u^m),\quad S(u^1,\dots,u^m),\quad y^i(u^1,\dots,u^m)$$

remplissent dans Ω l'équation

(27) $$dS(u^1,\dots,u^m) = \sum_{i/1}^{n} y^i(u^1,\dots,u^m)\,dx^i(u^1,\dots,u^m).$$

On dira qu'une multiplicité d'éléments unis est *régulière dans un ensemble* Ω lorsqu'elle jouit, en outre, des deux propriétés suivantes: 1⁰) les fonctions (26) sont de classe C^1 dans Ω, 2⁰) le rang de la matrice jacobienne

(28) $$\left\|\frac{D(x^1,\dots,x^n,S,y^1,\dots,y^n)}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|$$

est égal à m en tout point de Ω, ou bien, autrement dit, les fonctions (26) sont indépendantes en tout point de Ω.

Toute solution (26) de l'équation (27), solution jouissant des deux propriétés précédentes sera dite *solution régulière* de cette équation.

Remarque 4. Pour toute solution de l'équation (27) la matrice (28) et la matrice

(29) $$\left\|\frac{D(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|$$

ont le même rang en tout point où l'équation (27) est remplie. Autrement dit: Si la suite (26) représente une solution de (27) dans Ω, alors les fonctions (26) et les fonctions

$$x^i(u^1,\dots,u^m),\quad y^i(u^1,\dots,u^m)$$

ne peuvent être indépendantes dans Ω qu'à la fois. On a, en effet, pour tout point $(u^1,...,u^m)$ de ce genre l'égalité

$$S_{u^j}=\sum_{i/1}^{n} y^i x^i_{u^j}$$

d'où il résulte que la ligne de la matrice (28) correspondant à la fonction S est une combinaison linéaire des lignes correspondant aux fonctions x^i.

Remarque 5. Si la suite (26) représente une solution régulière de l'équation (27), solution valable dans un ensemble Ω, alors la suite de fonctions

(30) $$x^i(u^1,...,u^m),\quad y^i(u^1,...,u^m),\qquad (i=1,...,n)$$

représente une solution (régulière dans Ω) du système

(2) $$\sum_{i/1}^{n} (x^i_{u^\alpha} y^i_{u^\beta} - x^i_{u^\beta} y^i_{u^\alpha})=0,\qquad (\alpha,\beta=1,...,m).$$

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1 à la page 69 (cf. aussi la Définition 1, § 5). Si inversement une suite de la forme (30) représente une solution régulière du système (2) solution valable dans un ensemble Ω ouvert et convexe (ou plus généralement simplement connexe) alors il existe une fonction S telle que la suite (26) représente une solution régulière (valable dans Ω) de l'équation (27). On détermine la fonction S (à une constante additive près) par *une quadrature* (cf. § 2, Théorème 1).

Dans le cas de Ω ouvert et convexe (ou simplement connexe) la construction de la plus générale multiplicité d'éléments unis se ramène donc à la construction de la plus générale solution régulière du système (2). Or la construction d'une telle solution du système (2), solution valable dans un voisinage suffisamment petit d'un point U_0 a été présentée dans le Théorème 2 du § 5. La construction de la plus générale multiplicité régulière d'éléments unis (définie dans un voisinage suffisamment petit de U_0) découle ainsi immédiatement du Théorème 2 (§ 5) et du Théorème 1 (§ 2).

Nous allons voir que *la quadrature mentionnée* sera superflue. Avant de le montrer nous introduirons la *définition des transformations élémentaires de contact.*

Définition 3. Soit

(31) $$\hat{x}^i=\hat{x}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n),\ \hat{y}^i=\hat{y}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)$$

une transformation canonique élémentaire quelconque (cf. § 3, Définition 1) qui transforme les points $(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)$ en points $(\hat{x}^1,...,\hat{y}^n)$. Il existe une fonction $\hat{\psi}(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)$ telle que l'équation

(32) $$\sum_{i/1}^{n}[\hat{y}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)d\hat{x}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)-\bar{y}^i d\bar{x}^i]=d\hat{\psi}(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)$$

est vérifiée pour tous les points $\bar{x}^1,...,\bar{y}^n$ [1]. La différence de deux fonctions $\hat{\psi}$ de cette sorte est évidemment constante. La transformation

(33) $$\hat{x}^i=\hat{x}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n),\quad \hat{y}^i=\hat{y}^i(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n),\quad \hat{S}=\bar{S}+\hat{\psi}(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)+C$$

(où C désigne une constante quelconque) sera appelée *transformation élémentaire de contact. Les transformations* (31) et (33) seront appelées *adjointes* l'une de l'autre.

Remarque 6. On vérifie immédiatement que la transformation inverse d'une transformation élémentaire de contact constitue une transformation du même genre (cf. § 3, Propriété 1).

Si les fonctions

$$\bar{x}^i(w^1,...,w^m),\quad \bar{S}(w^1,...,w^m),\quad \bar{y}^i(w^1,...,w^m)$$

déterminent une multiplicité d'éléments unis c.-à-d. remplissent l'équation

$$d\bar{S}(w^1,...,u^m)=\sum_{i/1}^{n}\bar{y}^i(w^1,...,w^m)d\bar{x}^i(w^1,...,w^m)$$

alors elles passent, par l'intermédiaire de la transformation (33) en une suite de fonctions vérifiant l'équation

$$d\hat{S}(w^1,...,w^m)=\sum_{i/1}^{n}\hat{y}^i(w^1,...,w^m)d\hat{x}^i(w^1,...,w^m).$$

---

[1]) Pour obtenir effectivement (et cela sans effectuer aucune quadrature) une fonction $\hat{\psi}$ de cette sorte on pose

$$\hat{\psi}(\bar{x}^1,...,\bar{y}^n)=\sum_{i/1}^{n}\varepsilon_i\bar{x}^i\bar{y}^i.$$

La transformation (31) étant canonique élémentaire il est facile de déterminer les coeffitients constants ε_i de façon que l'équation (32) soit identiquement vérifiée. On a pour chaque ε_i ou bien $\varepsilon_i=0$, ou bien $\varepsilon_i^2=1$.

La transformation (33) transforme donc chaque multiplicité d'éléments unis en une multiplicité du même genre. Elle est donc une transformation de contact au sens ordinaire.

Théorème 3. Considérons l'équation

$$(34) \qquad d\hat{S}(w^1,\ldots,w^m)=\sum_{i/1}^{n}\hat{y}^i(w^1,\ldots,w^m)\,d\hat{x}^i(w^1,\ldots,w^m).$$

L'existence de solutions régulières de cette équation n'étant possible que dans le cas

$$0<m\leqslant n$$

(cf. § 5, Définition 2, Définition 1, Remarque 1 et Remarque 5), nous supposons que cette inégalité a lieu.

Pour obtenir la plus générale solution régulière de l'équation (34), solution valable dans un voisinage suffisamment petit d'un point

$$(35) \qquad W_0=(w_0^1,\ldots,w_0^m)$$

(ou, ce qui revient au même, pour obtenir la plus générale multiplicité régulière d'éléments unis définie dans un voisinage de W_0) on procède comme il suit.

On construit d'abord (en s'appuyant sur le Théorème auxiliaire 1, § 5) la solution

$$(36) \qquad x^i(u^1,\ldots,u^m),\ S(u^1,\ldots,u^m),\ y^i(u^1,\ldots,u^m)$$

la plus générale du système

$$(37) \qquad \begin{cases} dS(u^1,\ldots,u^m)=\sum y^i(u^1,\ldots,u^m)\,dx^i(u^1,\ldots,u^m), \\ x^j\equiv u^j \ (j=1,\ldots,m), \end{cases}$$

solution qui est de classe C^1 dans un voisinage d'un point $U_0=(u_0^1,\ldots,u_0^m)$ [1]). Nous introduisons ensuite une transformation arbitraire de la forme (16), c.-à-d. de la forme

$$(38) \qquad u^\gamma=\lambda^\gamma(w^1,\ldots,w^m),\ (\gamma=1,\ldots,m)$$

[1]) En s'appuyant sur la Remarque 5, (§ 5) on construira la solution (de classe C^1) la plus générale du système (4) (cf. Théorème auxiliaire 1, § 5).

On remarquera que la fonction auxiliaire $S(u^1,\ldots,u^m)$ intervenant dans le Théorème auxiliaire 1 vérifie l'équation (10) donc aussi les équations (37). Or la détermination de la fonction S n'exigera aucune quadrature, car dans le procédé de construction fourni par le Théorème auxiliaire 1, les fonctions (5) et (6) ont été arbitrairement choisies, pourvu qu'elles jouissent d'une certaine régularité accessoire.

qui est de classe C^1 dans un voisinage de W_0, qui transforme W_0 en U_0 et dont le jacobien est non nul au point W_0. La suite (36) passe ainsi en une suite de fonctions de classe C^1

(39) $$\bar{x}^i(w^1,...,w^m),\ \bar{S}(w^1,...,w^m),\ \bar{y}^i(w^1,...,w^m)$$

qui satisfont à l'équation

(40) $$d\bar{S}(w^1,...,w^m)=\sum \bar{y}^i(w^1,...,w^m)d\bar{x}^i(w^1,...,w^m).$$

Introduisons ensuite une transformation élémentaire de contact de la forme (33) et cela une transformation tout à fait arbitraire de cette sorte. La suite (39) passera, par l'intermédiaire de cette transformation, en une suite

(41) $$\hat{x}^i(w^1,...,w^m),\ \hat{S}(w^1,...,w^m),\ \hat{y}^i(w^1,...,w^m)$$

qui constitue la plus générale solution régulière de l'équation (34), solution valable dans un voisinage suffisamment petit du point W_0.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que le procédé, décrit plus haut, fournit *exclusivement* des solutions *régulières* de l'équation (34). En vertu de la Remarque 6 (§ 5) ce procédé fournit des solutions de classe C^1 de l'équation (34). Afin de prouver que toute solution (41) fournie par ce procédé est régulière, il reste à prouver que les fonctions (41) ou, ce qui revient au même (cf. § 5, Remarque 4) les fonctions

$$\hat{x}^i(w^1,...,w^m),\ \hat{y}^i(w^1,...,w^m)$$

sont indépendantes dans un voisinage de W_0. Or les fonctions

(42) $$x^i(u^1,...,u^m),\ y^i(u^1,...,u^m)$$

intervenant dans la suite (36) sont indépendantes, car les fonctions $x^j(u^1,...,u^m)\equiv u^j$ $(j=1,...,m)$ sont indépendantes. Les fonctions (42) passent, par l'intermédiaire de la transformation (38) (dont le jacobien est non nul) en des fonctions indépendantes

(43) $$\bar{x}^i(w^1,...,w^m),\ \bar{y}^i(w^1,...,w^m)$$

qui figurent dans la suite (39). Appliquons aux fonctions (43) la transformation canonique élémentaire (31) qui est adjointe de la transformation (33). Nous obtiendrons alors la suite des fonctions

(44) $$\hat{x}^i(w^1,...,w^m),\ \hat{y}^i(w^1,...,w^m),\qquad (i=1,...,m)$$

qui figurent dans la suite (41). La suite (44) est constituée par des fonctions indépendantes dans un voisinage de W_0 (cf. § 3, Propriété 6).

Il reste à démontrer que chaque solution régulière de l'équation (34), solution considérée dans un voisinage suffisamment petit de W_0, peut être obtenue par le procédé en question.

Supposons, à cet effet, qu'une suite de la forme (41) représente une solution régulière de l'équation (34), solution valable dans un voisinage de W_0.

La suite (44) (que l'on obtient en supprimant la fonction $\hat{S}$ dans la suite (41)) représente donc une solution régulière (dans un voisinage de W_0) du système

$$\sum_{i/1}^{n}(\hat{x}^i_{w^\alpha}\hat{y}^i_{w^\beta}-\hat{x}^i_{w^\beta}\hat{y}^i_{w^\alpha})=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

(cf. § 5, Remarque 5). On peut, par conséquent, déterminer (cf. § 5, Théorème 2)

1⁰) une suite de fonctions de la forme (42) qui sont de classe C^1 dans un voisinage d'un point U_0 et qui remplissent, dans ce voisinage, le système

$$\sum_{i/1}^{n}(x^i_{u^\alpha}y^i_{u^\beta}-x^i_{u^\beta}y^i_{u^\alpha})=0, \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$
$$x^j\equiv u^j, \qquad (j=1,\dots,m);$$

2⁰) une transformation de classe C^1 de la forme (38) dont le jacobien est non nul dans un voisinage de W_0 et qui transforme W_0 en U_0,

3⁰) une transformation canonique élémentaire de la forme (31),

et cela d'une telle façon que la suite (42) et les transformations (38) et (31) jouissent de la propriété suivante:

Si l'on désigne par (43) l'image de la suite (42) par l'intermédiaire de la transformation (38), alors l'image de la suite (43) par l'intermédiaire de la transformation canonique élémentaire (31) coïncide avec la suite (44). Il existe donc (cf. § 2, Théorème 1 ou § 5, Remarque 5) une fonction

$$S(u^1,\dots,u^m)$$

qui est de classe C^1 dans un voisinage de U_0, laquelle fonction jointe à la suite (42) donne une suite de la forme (36), cette dernière suite constituant une solution (valable dans un voisinage de U_0) de l'équation (37). Formons maintenant la transformation élémentaire de contact (33) adjointe à la transformation élémentaire canonique (31).

En appliquant à la suite (36) la transformation (38) nous obtiendrons une suite de la forme (39) et en appliquant, enfin, à la suite (39) la transformation (33) nous obtiendrons une suite de fonctions

(45) $$\hat{x}^i(w^1,...,w^m),\ \hat{S}_1(w^1,...,w^m)+C,\ \hat{y}^i(w^1,...,w^m).$$

En vertu de la première partie (déjà démontrée) du présent théorème cette suite vérifie identiquement (dans un voisinage de W_0) l'équation

$$d(\hat{S}_1+C)=\sum_i \hat{y}^i(w^1,...,w^m)\,d\hat{x}^i(w^1,...,w^m).$$

Il s'ensuit en vertu de (34) que

$$d(\hat{S}_1+C-\hat{S})\equiv 0.$$

La fonction $\hat{S}_1+C-\hat{S}$ est donc constante dans un voisinage de W_0. En choisissant convenablement la constante C on obtiendra $\hat{S}_1+C-\hat{S}\equiv 0$, c.-à-d. $\hat{S}_1+C=\hat{S}$ et la suite (45) deviendra ainsi identique à la suite (41). En observant que la suite (45) a été obtenue par le procédé du présent théorème nous en concluons que notre théorème est juste.

§ 6. Exemples

Exemple 1. Considérons la multiplicité V d'éléments de contact définie par les formules suivantes:

(1) $$x^{(1)}=u,\ x^{(2)}=u\sin v,\ s=u\cos v,$$

(2) $$y^{(1)}=\cos v+\sin v\,\mathrm{tg}\,v,\ y^{(2)}=-\mathrm{tg}\,v.$$

C'est une multiplicité d'éléments unis régulière au voisinage du point $u=0$, $v=0$ car

$$ds\equiv y^{(1)}dx^{(1)}+y^{(2)}dx^{(2)} \quad \text{et} \quad \frac{D(x^{(1)},y^{(2)})}{D(u,v)}=-1\neq 0 \quad \text{pour } u=0, v=0.$$

Le support ponctuel[1]) (1) de cette multiplicité est singulier au point $u=0$, $v=0$ car le rang commun des matrices

$$\left\| \frac{D(x^{(1)}, x^{(2)}, s)}{D(u,v)} \right\|, \quad \left\| \frac{D(x^{(1)}, x^{(2)})}{D(u,v)} \right\|$$

est égal à 1 au point $u=0$, $v=0$ et est égal à 2 pour une suite de points convenables tendant vers le point $u=0$, $v=0$. La multiplicité V (qui est définie au moyen des fonctions analytiques) ne peut donc pas être obtenue par l'intermédiaire de la méthode usuelle (cf. l'Introduction, p. 57).

Soumettons la multiplicité V à la transformation de contact T définie par les formules

$$\hat{x}^{(1)} = x^{(1)}, \quad \hat{y}^{(1)} = y^{(1)}, \quad \hat{x}^{(2)} = -y^{(2)}, \quad \hat{y}^{(2)} = x^{(2)}, \quad \hat{s} = s - y^{(2)} x^{(2)}.$$

Nous obtiendrons une multiplicité d'éléments unis $\hat{V}$ dont le support ponctuel sera régulier au point $u=0$, $v=0$, car

$$\frac{D(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)})}{D(u,v)} \neq 0 \qquad \text{pour } u=0, v=0.$$

La multiplicité $\hat{V}$ peut donc être obtenue par la méthode usuelle (au voisinage du point $u=0$, $v=0$), tandis qu'il n'en est pas ainsi de la multiplicité V résultant de $\hat{V}$ par l'intermédiaire d'une transformation analytique de contact. La possibilité d'appliquer la méthode usuelle (dans un voisinage suffisamment petit du point $u=0$, $v=0$) n'est donc pas invariante relativement aux transformations de contact, même lorsqu'on se place sur le terrain des fonctions analytiques.

Exemple 2. Nous allons construire une multiplicité *singulière* d'éléments unis dépendant d'un paramètre

(1) $$x^1 = x^1(t), \quad x^2 = x^2(t), \quad s = s(t), \quad y^1 = y^1(t), \quad y^2 = y^2(t),$$

multiplicité qui est *de classe* C^∞ dans l'intervalle $-1 \leqslant t \leqslant 1$ et qui envisagée dans un intervalle partiel quelconque $-\varepsilon < t < \varepsilon$ (où $0 < \varepsilon < 1$) *n'est située sur aucune multiplicité régulière d'éléments unis.*

---

[1]) C'est un cône de révolution dont le sommet se trouve à l'origine des coordonnées.

Voici d'abord une remarque bien élémentaire. Soit

(2) $$z^\lambda = z^\lambda(u^1, \ldots, u^m), \qquad (\lambda=1,\ldots,l)$$

où

(3) $$m<l$$

une multiplicité de points que nous désignons par V et qui est de classe C^1 dans un voisinage d'un point $U_0=(u_0^1,\ldots,u_0^m)$. Nous supposons que le rang de la matrice jacobienne

$$\left\| \frac{D(z^1,\ldots,z^l)}{D(u^1,\ldots,u^m)} \right\|$$

est égal à m au point U_0.

Or nous affirmons que parmi les l axes de coordonnées du système de coordonnées $z^1,\ldots,z^l$ il existe au moins un axe qui possède au plus un point commun avec la multiplicité V, pourvu que V soit envisagée dans un voisinage suffisamment petit de U_0. En effet: dans le cas contraire l'origine de coordonnées serait situé sur V et correspondrait au point U_0. Chaque axe de coordonnées serait tangent, à la multiplicité V quel petit que soit le voisinage de U_0 dans lequel on envisage V. Il existerait donc l vecteurs indépendants (situés sur les axes de coordonnées du système de coordonnées $z^1,\ldots,z^l$) tangents à V à l'origine. Or c'est impossible car le nombre maximal de tels vecteurs est égal à m et $m<l$.

Procédons maintenant à la construction de la multiplicité (1). Désignons par

$$\psi(A,B;t)$$

une fonction de la variable t définie dans l'intervalle

(4) $$A\leqslant t\leqslant B$$

par les formules

$$\psi(A,B;t)=e^{-[(t-A)^{-2}+(t-B)^{-2}]} \quad \text{lorsque} \quad A<t<B$$
$$\psi(A,B;A)=0, \quad \psi(A,B;B)=0.$$

On sait que cette fonction est de classe C^∞ dans l'intervalle (4) et que la fonction ψ et ses dérivées de tous les ordres sont nulles aux extrémités de cet intervalle. Considérons maintenant une suite croissante de nombres

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, \ldots$$

qui converge vers zéro et telle que $a_1=-1$.

Nous posons

$$\begin{aligned} &x^1(t)=k_\nu\psi(a_\nu,b_\nu;t), && x^2(t)=y^1(t)=y^2(t)\equiv 0 && \text{lorsque } a_\nu\leqslant t\leqslant b_\nu, \\ &x^2(t)=k_\nu\psi(b_\nu,c_\nu;t), && x^1(t)=y^1(t)=y^2(t)\equiv 0 && \text{lorsque } b_\nu\leqslant t\leqslant c_\nu, \\ &y^1(t)=k_\nu\psi(c_\nu,d_\nu;t), && x^1(t)=x^2(t)=y^2(t)\equiv 0 && \text{lorsque } c_\nu\leqslant t\leqslant d_\nu, \\ &y^2(t)=k_\nu\psi(d_\nu,a_{\nu+1};t), && x^1(t)=x^2(t)=y^1(t)\equiv 0 && \text{lorsque } d_\nu\leqslant t\leqslant a_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Les constantes $k_\nu>0$ doivent être choisies si petites que les fonctions $x^1(t),x^2(t),y^1(t),y^2(t)$ et leurs dérivées d'ordres $1,2,\dots,\nu$ possèdent des modules inférieurs à $1/\nu$ dans les intervalles $[a_\nu,b_\nu]$, $[b_\nu,c_\nu]$, $[c_\nu,d_\nu]$, $[d_\nu,a_{\nu+1}]$. Nous posons

$$x^1(0)=x^2(0)=y^1(0)=y^2(0)=0$$

et

$$x^i(-t)\equiv x^i(t),\ y^i(-t)=y^i(t),\ (i=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

On démontre facilement que les fonctions $x^i(t),y^i(t)$ sont de classe C^∞ dans l'intervalle $[-1,+1]$.

Nous posons

$$s(t)=\int_0^t\sum_{i/1}^{2}y^i(t)\,dx^i(t)\equiv 0.$$

La variété auxiliaire

$$x^1=x^1(t),\ x^2=x^2(t),\ y^1=y^1(t),\ y^2=y^2(t) \tag{5}$$

envisagée dans un voisinage quelconque $-\varepsilon<t<\varepsilon$ du point $t=0$ possède en commun, avec chacun de quatre axes x^1,x^2,y^1,y^2, des points différents de l'origine.

Considérons maintenant une multiplicité régulière quelconque d'élément unis

$$\begin{cases} x^i=\hat{x}^i(u^1,\dots,u^m),\ y^i=\hat{y}^i(u^1,\dots,u^m)\ (i=1,2) \\ s=\hat{s}\,(u^1,\dots,u^m) \end{cases} \tag{6}$$

Le rang de chacune des matrices

$$\left\|\frac{D(\hat{x}^1,\hat{x}^2,\hat{y}^1,\hat{y}^2,\hat{s})}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|$$
$$\left\|\frac{D(\hat{x}^1,\hat{x}^2,\hat{y}^1,\hat{y}^2)}{D(u^1,\dots,u^m)}\right\|$$

est égal à m (§ 5, Définition 1 et Remarque 4). On a $1\leqslant m\leqslant 2$ (v. § 5, Théorème 3). Si la multiplicité d'éléments unis (1) envisagée dans un voisinage $-\varepsilon<t<\varepsilon$ était située sur la multi-

plicité régulière (6) alors la multiplicité auxiliaire (5), envisagée dans le même voisinage, serait située sur la multiplicité

(7) $$x^i=\hat{x}^i(u^1,\dots,u^m),\quad y^i=\hat{y}^i(u^1,\dots,u^m).$$

En rapprochant cette multiplicité de la multiplicité (2) nous voyons que $l=4$, l'inégalité (3) est donc remplie. En vertu des faits acquis tout à l'heure nous voyons que la multiplicité (5) envisagée dans l'intervalle $-\varepsilon<t<\varepsilon$ ne peut pas être située sur la multiplicité (7) et que par conséquent la multiplicité (1), envisagée dans le même intervalle, ne peut pas être située sur la multiplicité (6).

§ 7. Application aux transformations canoniques

Définition 1 des transformations canoniques. Considérons une transformation de la forme

(1) $$\left.\begin{aligned}\bar{x}^i&=X^i(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n),\\ \bar{y}^i&=Y^i(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n),\end{aligned}\right\}\ (i=1,\dots,n)$$

transformation subordonnant aux points $x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n$ de l'espace à $2n$ dimensions des points $\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n,\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^n$ du même espace.

La transformation (1) est dite être canonique dans un ensemble E lorsqu'en tout point de E sont vérifiées les équations

(2) $$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial Y^i}{\partial x^\beta}-\frac{\partial X^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha}\right)=0,\\ &\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial Y^i}{\partial y^\beta}-\frac{\partial X^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial Y^i}{\partial y^\alpha}\right)=0,\\ &\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial Y^i}{\partial y^\beta}-\frac{\partial X^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha}\right)=\delta_{\alpha\beta},\qquad (\alpha,\beta=1,\dots,n),\end{aligned}\right.$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ désignent les indices de KRONECKER[1]).

Les équations (2) peuvent être écrites au moyen de crochets de LAGRANGE sous la forme suivante

(3) $$[x^\alpha,x^\beta]=0,\quad [y^\alpha,y^\beta]=0,\quad [x^\alpha,y^\beta]=\delta_{\alpha\beta}\quad (\alpha,\beta=1,\dots,n).$$

---

[1]) On a $\delta_{\alpha\beta}=0$ lorsque $\alpha\neq\beta$ et $\delta_{\alpha\beta}=1$ lorsque $\alpha=\beta$.

Nous nous occuperons dans la suite des transformations canoniques (1) seulement dans le cas où les fonctions X^i, Y^i sont de classe C^1, c.-à-d. lorsqu'elles possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre.

Voici un théorème résultant immédiatement du Théorème 1 du § 2.

Théorème 1. Supposons que les fonctions X^i, Y^i figurant dans (1) soient de classe C^1 dans un ensemble ouvert et convexe Ω (situé dans l'espace à $2n$ dimensions composé de points $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ [1]).

Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation (1) soit canonique dans Ω consiste en ce qu'il existe une fonction $S(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ qui est de classe C^1 dans Ω et qui vérifie, en tout point de Ω, l'équation

(4) $$dS = \sum_{i/1}^{n} Y^i dX^i - \sum_{i/1}^{n} y^i dx^i.$$

Démonstration. Adressons-nous au Théorème 1 du § 2. Introduisons au lieu de variables indépendantes

$$u^1, ..., u^m$$

les variables indépendantes

(5) $$x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n$$

et au lieu des fonctions (1) et (2) à la page 69 les fonctions

(6) $$X^1, ..., X^n,\ x^1, ..., x^n,\ Y^1, ..., Y^n,\ -y^1, ..., -y^n.$$

On observe facilement que les équations (5) à la page 70 prendrons maintenant la forme (3) (page 99) [2]). Il s'ensuit immédiatement que le présent théorème constitue un cas particulier du Théorème 1 du § 2.

---

[1]) Le présent théorème est juste aussi sous l'hypothèse que Ω est ouvert et constitue l'image homéomorphe de l'intérieur d'une sphère à $2n$ dimensions (cf. la note en bas de la page 70).

[2]) Les nombres m et n figurant dans le Théorème 1 du § 2 sont donc maintenant remplacés par $2n$. Il va sans dire que les fonctions $x^1, ..., x^n, -y^1, ..., -y^n$ figurant dans (6) peuvent être considérées comme des fonctions de toutes les variables (5).

Remarque 1. En s'appuyant sur la définition des transformations canoniques on vérifie immédiatement que les *transformations élémentaires* définies dans le § 3 (page 74) *sont canoniques* dans l'espace de tous les points (5). C'est pour cette raison que ces transformations seront appelées dans la suite *transformations canoniques élémentaires*.

Théorème 2. La classe de toutes les transformations canoniques de classe C^1 constitue un groupe de transformations.

Il nous sera commode d'énoncer ce théorème sous la forme suivante.

Supposons qu'une transformation T (que nous écrirons sous la forme (1)) soit canonique et de classe C^1 dans un voisinage du point

(7) $$x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n.$$

Supposons ensuite qu'une transformation B

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \alpha^i(\xi^1, \dots, \xi^n, \eta^1, \dots, \eta^n) \\ y^i &= \beta^i(\xi^1, \dots, \xi^n, \eta^1, \dots, \eta^n) \end{aligned}\right\} \quad \textit{(transformation } B\textit{)}$$

soit canonique et de classe C^1 dans un voisinage du point

(8) $$\xi_0^1, \dots, \xi_0^n, \eta_0^1, \dots, \eta_0^n.$$

Supposons enfin que le point (7) représente l'image du point (8) par l'intermédiaire de la transformation B.

Ceci étant, nous affirmons que la transformation

$$TB$$

que nous écrirons sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^i &= \gamma^i(\xi^1, \dots, \xi^n, \eta^1, \dots, \eta^n) \\ \bar{y}^i &= \delta^i(\xi^1, \dots, \xi^n, \eta^1, \dots, \eta^n) \end{aligned}\right\} \quad \textit{(transformation } TB\textit{)}$$

est de classe C^1 et canonique dans un voisinage du point (8).

Démonstration. En vertu du Théorème 1 du présent paragraphe il existe une fonction S de classe C^1 qui remplit identiquement l'équation (4) dans un voisinage du point (7). Il existe, pour la même raison, une fonction $\sigma(\xi^1, \dots, \eta^n)$ qui est de classe C^1 dans un voisinage du point (8) et qui remplit identiquement, dans ce voisinage, l'équation

$$d\sigma = \sum \beta^i d\alpha^i - \sum \eta^i d\xi^i.$$

En vertu de (4) on aura, dans un voisinage du point (8), l'identité

$$d\{(S)_B\}=\sum(Y^i)_B\, d\{(X^i)_B\}-(y^i)_B\, d\{(x^i)_B\}=\sum\delta^i d\gamma^i-\sum\beta^i d\alpha^i\ ^{1)}.$$

En ajoutant les deux identités précédentes nous obtiendrons, dans un voisinage du point (8), l'identité

$$d\{(S)_B+\sigma\}=\sum\delta^i d\gamma^i-\sum\eta^i d\xi^i.$$

Il en résulte, en vertu du Théorème 1 (§ 7), que la transformation TB (qui est de classe C^1 dans un voisinage du point (8)) est canonique dans un voisinage de ce point.

Construction de la transformation canonique la plus générale dans le voisinage d'un point

Théorème 3. Nous affirmons que la transformation canonique la plus générale qui est de classe C^1 dans un voisinage (suffisamment petit) d'un point

(9) $$x_0^1,\dots,x_0^n,y_0^1,\dots,y_0^n$$

peut être obtenue par le procédé suivant.

Nous prenons d'abord une fonction arbitraire (fonction directrice, — „erzeugende Funktion")

$$\Omega(\xi^1,\dots,\xi^n,\bar{\xi}^1,\dots,\bar{\xi}^n)$$

qui est de classe C^2 dans un voisinage d'un point

(10) $$\xi_0^1,\dots,\xi_0^n,\bar{\xi}_0^1,\dots,\bar{\xi}_0^n$$

et telle que le déterminant

(11) $$|\Omega_{\xi^i,\bar{\xi}^j}|\neq 0\ ^{2)}$$

ne soit pas nul au point (10).

---

[1]) f étant une fonction des variables $x^1,\dots,y^n$, le symbole $(f)_B$ désigne la fonction des variables $\xi^1,\dots,\eta^n$ que l'on obtient en effectuant dans la fonction $f(x^1,\dots,y^n)$ la substitution $x^i=\alpha^i(\xi^1,\dots,\eta^n)$, $y^i=\beta^i(\xi^1,\dots,\eta^n)$. Cette substitution est donc représentée par les mêmes formules que la transformation B.

[2]) Nous avons évidemment $|\Omega_{\xi^i,\bar{\xi}^j}|=\dfrac{D(\Omega_{\xi^1},\dots,\Omega_{\xi^n})}{D(\bar{\xi}^1,\dots,\bar{\xi}^n)}=\dfrac{D(\Omega_{\bar{\xi}^1},\dots,\Omega_{\bar{\xi}^n})}{D(\xi^1,\dots,\xi^n)}$

Nous introduisons ensuite deux transformations auxiliaires suivantes

(12) $x^i = \xi^i,\ y^i = -\Omega_{\xi^i}$ *(transformation U).*

(13) $\hat{x}^i = \bar{\xi}^i,\ \hat{y}^i = \Omega_{\bar{\xi}^i}$ [1]) *(transformation V).*

La fonction Ω doit être choisie de façon que la transformation U fasse correspondre le point (9) au point (10).

Nous introduisons enfin une transformation canonique élémentaire (cf. Rémarque 1 du présent paragraphe) arbitraire E

(14) $$\left.\begin{aligned}\bar{x}^i &= \varphi^i(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n,\hat{y}^1,\ldots,\hat{y}^n)\\ \bar{y}^i &= \psi^i(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n,\hat{y}^1,\ldots,\hat{y}^n)\end{aligned}\right\}\ \textit{(transformation } E\textit{).}$$

Cela fait nous formons la transformation T

(15) $$T = EVU^{-1}$$

que nous écrirons sous la forme

(16) $\bar{x}^i = X^i(x^1,\ldots,y^n), \bar{y}^i = Y^i(x^1,\ldots,y^n)$ *(transformation T).*

La transformation T ainsi obtenue constitue la plus générale [2]) transformation canonique de classe C^1 définie dans un voisinage (suffisamment petit) du point (9).

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que la transformation (15) (qui est évidemment de classe C^1) est canonique au voisinage du point (9). Considérons à cet effet la transformation

(17) $$W = V \cdot U^{-1}$$

---

[1]) Les transformations U et V peuvent être obtenues au moyen de la suivante règle formelle: Nous écrivons la condition nécessaire et suffisante (cf. § 7, Théorème 1) pour que la transformation (18) (v. plus bas, page 104) soit canonique et nous écrivons ensuite la différentielle de la fonction Ω

$$\sum \hat{y}^i d\hat{x}^i + \sum(-y^i)dx^i = dS,$$
$$\sum \Omega_{\bar{\xi}^i} d\bar{\xi}^i + \sum \Omega_{\xi^i} d\xi^i = d\Omega.$$

En écrivant la condition que les variables, figurant aux mêmes places dans les premiers membres de ces relations, doivent être égales, nous obtenons les équations (12) et (13).

[2]) La plus générale transformation canonique de classe C^1 dépend donc d'une fonction arbitraire Ω (fonction directrice-erzeugende Funktion) et d'une transformation canonique élémentaire arbitraire E.

et écrivons-la sous la forme

(18) $\hat{x}_i = \hat{X}^i(x^1, \ldots, y^n)$, $\hat{y}_i = \hat{Y}_i(x^1, \ldots, y^n)$ *(transformation W).*

En vertu de (12), (13) et (18) nous avons, évidemment, au voisinage du point (9), les relations

$$(19)\qquad \begin{aligned} &(\xi^i)_{U-1} \equiv x^i, \ (-\Omega_{\xi^i})_{U-1} \equiv y^i, \\ &(\bar{\xi}^i)_{U-1} \equiv \hat{X}^i(x^1, \ldots, y^n), \ (\Omega_{\bar{\xi}^i})_{U-1} \equiv \hat{Y}^i(x_1, \ldots, y^n). \end{aligned}$$

Dans ces formules la notation $(\ )_{U-1}$ exprime que, dans l'expression figurant entre paranthèses, les variables $\xi^i, \bar{\xi}^i$ doivent être remplacées par des fonctions de variables $x^1, \ldots, y^n$, fonctions que l'on obtient en résolvant les équations (12) en ξ^i et $\bar{\xi}^j$.

La relation

$$(20)\qquad \sum_i \Omega_{\bar{\xi}^i} d\bar{\xi}^i + \sum_i \Omega_{\xi^i} d\xi^i = d\Omega$$

est identiquement vérifiée au voisinage du point (10). On aura donc dans un voisinage du point (9) l'identité

$$\sum_i (\Omega_{\bar{\xi}^i})_{U-1} d\{(\bar{\xi}^i)_{U-1}\} + \sum_i (\Omega_{\xi^i})_{U-1} d\{(\xi^i)_{U-1}\} = d\{(\Omega)_{U-1}\}.$$

En posant $\hat{S} = (\Omega)_{U-1}$ nous pouvons mettre cette identité sous la forme suivante (cf. (19))

$$(21)\qquad \sum_i \hat{Y}^i(x^1, \ldots, y^n) d\hat{X}^i(x^1, \ldots, y^n) - \sum_i y^i dx^i = d\hat{S}(x^1, \ldots, y^n)$$

et, en vertu du Théorème 1 (§ 7), il résulte de cette identité que la transformation W est canonique au voisinage du point (9). La transformation E étant canonique dans l'espace tout entier, il en résulte (§ 7, Théorème 2) que la transformation (cf. (15) et (17))

$$(22)\qquad T = E \cdot W$$

est canonique dans un voisinage du point (1), c. q. f. d.

Il reste à prouver que chaque transformation de classe C^1, qui est canonique dans un voisinage du point (9), peut être obtenue par le procédé indiqué dans l'énoncé du présent théorème.

Supposons à cet effet, qu'une transformation T de la forme (16) soit canonique et de classe C^1 dans un voisinage du point (9).

En vertu du Théorème 1 (§ 7) il existe une fonction $S(x^1,...,y^n)$ qui est de classe C^1 au voisinage du point (9) et telle que les fonctions figurant dans la matrice

$$(23)\qquad \left\| \begin{matrix} x^1,...,x^n, & X^1(x^1,...,y^n),...,X^n(x^1,...,y^n) \\ -y^1,...,-y^n, & Y^1(x^1,...,y^n),...,Y^n(x^1,...,y^n) \end{matrix} \right\|$$

remplissent identiquement, au voisinage du point (9), l'équation

$$(24)\qquad \sum_i Y^i dX^i + \sum_i (-y^i)\, dx^i = dS.$$

La matrice jacobienne

$$\left\| \frac{D(x^1,...,x^n,X^1,...,X^n,-y^1,...,-y^n,Y^1,...,Y^n)}{D(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)} \right\|$$

est d'ordre $2n$ au voisinage du point (1)[1].

La suite des variables

$$x^1,...,x^n,$$

(envisagées comme fonctions des variables indépendantes $x^1,...,y^n$) constitue (relativement aux fonctions figurant dans la matrice (23)) une suite principale de n fonctions indépendantes (§ 3, Définition 2).

En vertu du Théorème 1 du § 4 cette suite peut être complétée par n fonctions figurant dans n dernières colonnes (differentes entre elles) de la matrice (23) et cela d'une telle façon que l'on obtienne une suite principale de $2n$ fonctions indépendantes au point (9)[2]. Désignons cette suite par

$$(25)\qquad x^1,...,x^n,X^{\alpha_1},...,X^{\alpha_p},Y^{\beta_1},...,Y^{\beta_q}, \qquad (p+q=n).$$

---

[1]) En effet: cette matrice (dont l'ordre ne peut pas évidemment surpasser le nombre $2n$) renferme le déterminant non nul de degré $2n$

$$\frac{D(x^1,...,x^n,-y^1,...,-y^n)}{D(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)} = (-1)^n \neq 0.$$

[2]) Les variables $x^1,...,y^n$ jouent maintenant le rôle des variables indépendantes $u^1,...,u^m$ intervenant dans le Théorème 1 du § 4 et les fonctions $x^1,...,x^n$, $X^1,...,X^n$, $-y^1,...,-y^n$, $Y^1,...,Y^n$ jouent à présent le rôle des fonctions désignées par $x^1,...,y^n$ dans l'énoncé de ce théorème. Les équations (1) de ce théorème deviennent maintenant identiques avec les équations (2) à la page 99 qui sont identiquement vérifiées car la transformation (16) est canonique par hypothèse.

On aura donc, au point (9), l'inégalité

$$(26)\qquad \begin{aligned} 0 \neq \frac{D(x^1,\ldots,x^n,X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_p},Y^{\beta_1},\ldots,Y^{\beta_q})}{D(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)} = \\ = \frac{D(X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_p},Y^{\beta_1},\ldots,Y^{\beta_q})}{D(y^1,\ldots,y^n)} \neq 0. \end{aligned}$$

En vertu de la Propriété 4 (§ 3) il existe une transformation canonique élémentaire

$$F$$

qui transforme la suite des fonctions

$$X^1(x^1,\ldots,y^n),\ldots,X^n(x^1,\ldots,y^n),Y^1(x^1,\ldots,y^n),\ldots,Y^n(x^1,\ldots,y^n)$$

en une suite de fonctions

$$\hat{X}^1(x^1,\ldots,y^n),\ldots,\hat{X}^n(x^1,\ldots,y^n),\hat{Y}^1(x^1,\ldots,y^n),\ldots,\hat{Y}^n(x^1,\ldots,y^n)$$

et cela d'une telle façon que la suite des fonctions

$$X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_p},Y^{\beta_1},\ldots,Y^{\beta_q}$$

passe, par l'intermédiaire de la transformation F en la suite

$$\hat{X}^1,\ldots,\hat{X}^n.$$

Nous aurons donc au point (9) l'inégalité (cf. (26) et la Propriété 6 (§ 3))

$$(27)\qquad \frac{D(\hat{X}^1,\ldots,\hat{X}^n)}{D(y^1,\ldots,y^n)} \neq 0.$$

Introduisons une nouvelle transformation W (que nous désignerons au moyen des notations (18)) par la formule

$$W = F \cdot T$$

et envisageons la transformation

$$E = F^{-1}.$$

La transformation E est aussi élémentaire (cf. § 3, Propriété 1) et, par conséquent, canonique (cf. § 7, Rémarque 3). En vertu des deux dernières relations nous obtiendrons l'identité $T = E \cdot W$, c.-à-d. l'identité (22).

Il existera en outre (cf. Théorème 1 du présent paragraphe) une fonction $\hat{S}(x^1,...,y^n)$ qui est de classe C^1 au voisinage du point (9) et qui vérifie, dans ce voisinage, identiquement l'équation (21).

Introduisons la transformation P

$$\left.\begin{aligned} \xi^i &= x^i \\ \bar{\xi}^i &= \hat{X}^i(x^1,...,y^n) \end{aligned}\right\} \textit{(transformation } P\textit{)}. \tag{28}$$

Désignons maintenant (autrement que dans la première partie de la présente démonstration) par (10) l'image du point (9) par l'intermédiaire de la transformation P. La transformation P admet, en vertu de (27), au voisinage du point (9), une transformation inverse que nous écrirons sous la forme.

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \xi^i \\ y^i &= \vartheta^i(\xi^1,...,\bar{\xi}^n) \end{aligned}\right\} \textit{(transformation } P^{-1}\textit{)}. \tag{29}$$

Nous aurons évidemment, dans un voisinage du point (10) l'inégalité

$$\frac{D(\vartheta^1,...,\vartheta^n)}{D(\bar{\xi}^1,...,\bar{\xi}^n)} \neq 0. \tag{30}$$

Nous aurons aussi dans un voisinage du point (10) les identités

$$(x^i)_{P^{-1}} \equiv \xi^i,\ (\hat{X}^i)_{P^{-1}} \equiv \bar{\xi}^i,\ (y^i)_{P^{-1}} \equiv \vartheta^i. \tag{31}$$

Définissons maintenant les fonctions η^i par les formules

$$\eta^i(\xi^1,...,\bar{\xi}^n) = (\hat{Y}^i)_{P^{-1}} \tag{32}$$

et introduisons la transformation Q

$$\hat{x}^i = \bar{\xi}^i, \hat{y}^i = \eta^i(\xi^1,...,\bar{\xi}^n) \textit{ (transformation } Q\textit{)}. \tag{33}$$

Les relations (31) et (32) entraînent les identités

$$(\bar{\xi}^i)_P \equiv \hat{X}^i,\ (\eta^i)_P \equiv \hat{Y}^i$$

et de la il résulte (cf. (18)) que

$$W = QP. \tag{34}$$

Définissons maintenant la fonction Ω par la formule

$$\Omega(\xi^1,...,\bar{\xi}^n) = (\hat{S})_{P^{-1}} \tag{35}$$

et effectuons dans l'identité (21) la substitution P^{-1}. Nous obtiendrons en vertu de (31) et (32), dans un voisinage du point (10) les identités

(36) $$\eta^i \equiv \Omega_{\bar{\xi}^i}, \quad \vartheta^i \equiv -\Omega_{\xi^i}.$$

La fonction Ω est donc de classe C^2 dans un voisinage du point (10), car les fonctions ϑ^i et η^i sont de classe C^1 au voisinage de ce point.

La deuxième identité (36) et l'inégalité (30) conduisent immédiatement à la conclusion que l'inégalité (11) est remplie dans un voisinage du point (10). Définissons maintenant, comme dans la première partie de la présente démonstration, par U et V les transformations (12) et (13), la fonction Ω étant définie par la formule (35). Il résulte des relations (29), (33) et (36) que

$$U = P^{-1}, \quad V = Q$$

d'où l'on obtient en raison de (34) la relation

$$W = V \cdot U^{-1}.$$

De cette relation et de la relation (22) (qui vient d'être démontrée) nous déduisons immédiatement la relation (15), ce qui termine la démonstration.

Théorème 4. Le jacobien de toute transformation canonique de classe C^1 est égal à 1.

Démonstration. Soit (9) (cf. page 102) un point quelconque au voisinage duquel une transformation canonique T est de classe C^1. En vertu du théorème précédent on a

$$T = EVU^{-1}.$$

On vérifie facilement que le jacobien de toute transformation canonique élémentaire (et, par conséquent, aussi le jacobien de E) est égal à 1. Il suffit donc de prouver que

(37) $$\text{le jacobien de } (V \cdot U^{-1}) = 1.$$

Or on a (cf. (10), (11), (12), (13))

$$\text{le jacobien de } U = \frac{D(\xi^1, \ldots, \xi^n, -\Omega_{\xi^1}, \ldots, -\Omega_{\xi^n})}{D(\xi^1, \ldots, \xi^n, \bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{D(\Omega_{\xi^1}, \ldots, \Omega_{\xi^n})}{D(\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n)} = (-1)^n |\Omega_{\xi^i \bar{\xi}^j}| \neq 0,$$

$$\text{le jacobien de } V = \frac{D(\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n, \Omega_{\bar{\xi}^1}, \dots, \Omega_{\bar{\xi}^n})}{D(\xi^1, \dots, \xi^n, \bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{D(\Omega_{\bar{\xi}^1}, \dots, \Omega_{\bar{\xi}^n})}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)} = (-1)^n |\Omega_{\xi^i \bar{\xi}^j}| \neq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\text{le jacobien de } U \equiv \text{le jacobien de } V \neq 0$$

et de la on déduit immédiatement la relation (37).

Théorème 5. Toute transformation canonique envisagée dans un voisinage suffisamment petit d'un point où elle est de classe C^1 admet une transformation inverse et cette transformation est aussi canonique et de classe C^1.

Démonstration. Supposons qu'une transformation T representée par les formules (16) soit canonique et de classe C^1 au voisinage du point (9).

Désignons par

(38) $$\bar{x}_0^1, \dots, \bar{x}_0^n, \bar{y}_0^1, \dots, \bar{y}_0^n$$

l'image du point (9) par l'intermédiaire de la transformation T. En vertu du théorème précédent la transformation T, envisagée dans un voisinage suffisamment petit du point (9) admet une transformation inverse T^{-1} qui est de classe C^1 dans un voisinage du point (38). Il reste à prouver que T^{-1} est canonique dans un voisinage de (38).

Ecrivons la transformation T^{-1} sous la forme

$$x^i = \Xi^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{y}^n), \quad y^i = H^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{y}^n) \quad (\textit{transformation } T^{-1}).$$

En vertu du Théorème 1 du présent paragraphe il existe une fonction S (de classe C^1) vérifiant, au voisinage du point (9), l'équation (4). On aura donc, dans un voisinage du point (38), l'identité

$$\sum_i (Y^i)_{T^{-1}} d\{(X^i)_{T^{-1}}\} - \sum_i (y^i)_{T^{-1}} d\{(x^i)_{T^{-1}}\} \equiv d\{(S)_{T^{-1}}\}$$

c.-à-d. l'identité

$$\sum_i H^i d\Xi^i - \sum_i \bar{y}^i d\bar{x}^i = d\{-(S)_{T^{-1}}\}.$$

Il en résulte en vertu du Théorème 1 (§ 7) que la transformation T^{-1} est canonique dans un voisinage du point (38).

§ 8. Un exemple

Exemple 3. Nous allons construire deux fonctions $X(x,y)$, $Y(x,y)$ jouissant des propriétés suivantes: 1⁰) elles sont de classe C^1 dans un voisinage du point

(1) $$x=1,\ y=1,$$

2⁰) elles ne possèdent aucune dérivée partielle du second ordre en aucun point de ce voisinage, 3⁰) $X(x,y)>0$, $Y(x,y)>0$ dans ce voisinage
et telles que les formules

(2) $$X=X(x,y),\quad Y=Y(x,y)$$

représentent une transformation canonique dans ce voisinage. Supposons pour le moment qu'une telle transformation ait été construite. Il existera (cf. § 7, Théorème 1) une fonction $S(x,y)$ qui est de classe C^1 dans ce voisinage et qui y vérifie l'identité

$$dS\equiv YdX-ydx.$$

On aura donc pour chaque fonction S de ce genre

$$X_x\equiv\frac{S_x(x,y)+y}{Y},\quad X_y\equiv\frac{S_y(x,y)}{Y}$$

d'où il résultera que la fonction S ne possèdera en aucun point de ce voisinage aucune dérivée du second ordre. Malgré cela la fonction $\Omega(\xi,\bar{\xi})$ (erzeugende Funktion) appartenant à cette transformation sera de classe C^2 (cf. § 7, Théorème 3).

Afin de construire une transformation canonique (2) en question désignons par $\eta(\varrho)$ une fonction continue dans l'intervalle $0\leqslant\varrho<+\infty$ qui ne possède pas de dérivée $\eta'(\varrho)$ en aucun point de cet intervalle et telle que

(3) $$\eta(\varrho)>0,\qquad (0\leqslant\varrho<+\infty),$$

(4) $$\int_0^{+\infty}\eta(\varrho)d\varrho<\operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{2}$$ [1].

[1] D'après un théorème de Weierstrass (cf. p. ex. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, p. 590) il existe une fonction $\zeta(\varrho)$ continue dans l'intervalle $0\leqslant\varrho<+\infty$ et dont la dérivée $\zeta'(\varrho)$ n'existe en aucun point de cet intervalle. Il suffira de poser

$$\eta(\varrho)=[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\zeta(\varrho)]\cdot\frac{1}{(\varrho+1)^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{2}.$$

Nous posons

$$\varepsilon(\varrho)=\int_0^\varrho \eta(\varrho)d\varrho. \tag{5}$$

La dérivée $\varepsilon'(\varrho)$ est continue dans l'intervalle $0\leqslant\varrho<+\infty$ et la dérivée seconde $\varepsilon''(\varrho)$ n'existe en aucun point de cet intervalle. On a

$$0<\varepsilon(\varrho)<\operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{2}<\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{tg}(\varepsilon(\varrho))<\tfrac{1}{2}\quad (0<\varrho<+\infty). \tag{6}$$

Considérons les transformations auxiliaires

$$\begin{aligned}
&\psi=\varphi+\varepsilon(r),\ r=r. && \textit{(transformation A)}\\
&x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi && \textit{(transformation B)}\\
&X=r\cos\psi,\quad Y=r\sin\psi && \textit{(transformation C)}
\end{aligned}$$

et considérons la transformation T

$$T=CAB^{-1}. \tag{7}$$

La transformation T a la forme

$$\begin{cases} X=X(x,y)=x\cos\varepsilon(r)-y\sin\varepsilon(r)\\ Y=Y(x,y)=x\sin\varepsilon(r)+y\cos\varepsilon(r)\end{cases} \tag{8}$$

où

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Considérons un voisinage Ω du point (1) dans lequel on a

$$x>0,\ y>0,\ \frac{x}{y}<2,\ \frac{y}{x}<2. \tag{9}$$

On aura dans ce voisinage (cf. (6), (8), (9))

$$r_x>0,\ r_y>0,\ X>0,\ Y>0. \tag{10}$$

On vérifie facilement qu'aucune des dérivées partielles

$$\frac{\partial\varepsilon'(r)}{\partial x},\ \frac{\partial\varepsilon'(r)}{\partial y} \tag{11}$$

n'existe en aucun point appartenant à Ω, car dans le cas contraire la dérivée $\varepsilon''(r)$ existerait pour une certaine valeur de r (il faut tenir compte des deux premières inégalités (10)).

En vertu de (7) on a

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=1 \qquad \text{(dans } \Omega\text{)},$$

la transformation T est donc canonique dans Ω (cf. § 7, Définition 1). Il reste à prouver que les fonctions X, Y ne possèdent aucune dérivée du second ordre en aucun point de Ω. On a

$$X_x = -\varepsilon'(r) \cdot r_x Y + \cos\varepsilon(r)$$

et de là (cf. (10))

$$\varepsilon'(r) = \frac{\cos\varepsilon(r) - X_x}{r_x \cdot Y}.$$

Si une des dérivées X_{xx}, X_{yx} existait en un point de Ω, alors une des dérivées (11) existerait aussi en ce point, ce qui n'est pas possible. On démontre dans la même voie qu'aucune des dérivées $X_{yy}, X_{xy}, Y_{xx}, Y_{yx}, Y_{xy}, Y_{yy}$ n'existe en aucun point de Ω.

UN THÉORÈME SUR LES POLYNÔMES

Par STEFAN MAZURKIEWICZ, Warszawa

Je ne considére dans cette note que des ensembles plans, bornés. Ja vais désigner par $\delta(A)$, $\mu(A)$, $\tau(A)$ respectivement — le *diamètre*, la *mésure linéaire* [1]) et le *diamètre transfini* de l'ensemble A. Je me propose dc démontrer le

Théorème I. *A tout $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un $\eta>0$ tel que pour tout continu C de diamètre 1, tout ensemble fermé $E\subset C$ satisfaisant à l'inégalité $\mu(C-E)<\eta$ et tout polynome $P(z)$, on a:*

$$\max_{z\in C}|P(z)|<(1+\varepsilon)^n\max_{z\in E}|P(z)|, \tag{1}$$

n désignant le degré de $P(z)$.

Dans le cas où C est une circonférence ce théorème a été démontré par M. LEJA [2]).

Lemme 1. *C étant un continu, $E\subset C$ un ensemble fermé, on a:*

$$\tau(E)\geqq\tfrac{1}{4}(\delta(C)-\mu(C-E)). \tag{2}$$

Considérons deux points de C, dont la distance est égale à $\delta(C)$ et soit D la droite passant par ces points; soient C_1, E_1, K_1 les projections orthogonales de $C, E, C-E$ sur D. On a: $\mu(K_1)\leqq\mu(C-E)$, $\mu(C_1)=\delta(C)$, donc

$$\mu(E_1)\geqq\mu(C_1)-\mu(K_1)\geqq\delta(C)-\mu(C-E).$$

E_1 étant un ensemble linéaire on a $\tau(E_1)\geqq\frac{1}{4}\mu(E_1)$ [3]). Comme $\tau(E_1)\leqq\tau(E)$ il en résulte (2)

---

[1]) Pour la definition de la mésure linéaire d'un ensemble plan=length of a set, voir p. e. Saks: Theory of the integral (1937) p. 53—54.

[2]) Math. Ann. 107 p. 68—82, en part. p. 77 ss. L'expression à droite de (1) contient chez M. Leja encore le facteur $n+1$.

[3]) comp. Fekete: Math. Zeit. 32, p. 113.

Lemme 2. Soit $A=A_1+A_2, A_1, A_2$ désignant des ensembles fermés; $\delta(A)=1$, $\tau(A)>0$. Alors:

(3) $$\mathrm{Max}[\tau(A_1),\tau(A_2)]\geqq[\tau(A)]^2.$$

On ne peut pas avoir $\tau(A_1)=\tau(A_2)=0$, car on aurait [4]) $\tau(A)=0$. Donc on peut supposer toujours que $\tau(A_1)>0$. La condition $\delta(A)=1$ entraîne: $\tau(A)<1$ [5]), donc si $\tau(A_2)=0$ on a $\tau(A_1)=\tau(A)>[\tau(A)]^2$, donc (3). Si $\tau(A_2)>0$, désignons par $R_n^{(j)}(z)$ le n-éme polynome de FEKETE [6]) attaché à l'ensemble A_j et posons $\sigma_n^{(j)}=\sqrt[n]{\underset{z\in A_j}{\mathrm{Max}}\,|R_n^{(j)}(z)|}$ et: $Q_n(z)=R_n^{(1)}(z)R_n^{(2)}(z)$. D'après $\delta(A)=1$, on a: $|R_n^{(j)}(z)|\leqslant 1$ pour $z\in A$. Donc:

(4) $$\sqrt[n]{\underset{z\in A_j}{\mathrm{Max}}|Q_n(z)|}\leqq\sigma_n^{(j)},$$

(5) $$\sqrt[n]{\underset{z\in A}{\mathrm{Max}}|Q_n(z)|}\leqq\mathrm{Max}(\sigma_n^{(1)},\sigma_n^{(2)}).$$

D'après la relation [7]) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(j)}=\tau(A_j)$ il en résulte:

(6) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underset{z\in A}{\mathrm{Max}}|Q_n(z)|}\leqq\mathrm{Max}[\tau(A_1),\tau(A_2)].$$

Le coefficient de z^{2n} dans $Q_n(z)$ étant egal à 1, on a [8]):

(7) $$\sqrt[2n]{\underset{z\in A}{\mathrm{Max}}|Q_n(z)|}\geqq\tau(A),\qquad n=1,2,\ldots,$$

(8) $$\sqrt[n]{\underset{z\in A}{\mathrm{Max}}|Q_n(z)|}\geqq[\tau(A)]^2.$$

Les relations (6), (8) entraînent (3) c. q. f. d.

---

[4]) comp. H. Szmuszkowiczówna: C. R. Société Sc. Varsovie 1931, p. 1—7.

[5]) On a même $\tau(A)<\frac{1}{\sqrt{3}}$, A pouvant être enfermé dans un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comp. Straszewicz: Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen. Zurich 1914, p. 55.

[6]) c.-à-d. un polynome possedant les propriétés suivantes: 1) il est de degré n et le coefficient de z^n est 1, 2) ses zéros sont situés sur A_j, 3) de tous les polynomes jouissant de propriété 1, 2) il possède le plus petit maximum en valeur absolue sur A_j.

[7]) Fekete: Math. Zeit. 17, p. 235, 236.

[8]) l. c. p. 234 ss.

Lemme 3. A étant un ensemble fermé tel que $\delta(A)=1$, $\tau(A)>0$, $P(z)$ un polynome de dégré n, $z_0 \epsilon A$ un point où $|P(z)|$ atteint son maximum sur A, λ un nombre tel que $0<\lambda<\frac{[\tau(A)]^4}{4}$, k le nombre de zéros de $P(z)$ situé dans le cercle $|z-z_0|\leqq\lambda$, on a:

$$(9) \qquad k<\frac{2n\cdot\log\frac{2}{[\tau(A)]^2}}{\log\frac{1}{\lambda}}.$$

On peut supposer que le coefficient de z^n dans $P(z)$ est 1. Désignons respectivement par $\alpha_1\ldots\alpha_k, \beta_1\ldots\beta_l, \gamma_1\ldots\gamma_m$ les zéros de $P(z)$ situés dans les trois régions: $|z-z_0|\leqq\lambda$; $\lambda<|z-z_0|\leqq 2$; $|z-z_0|>2$. Posons:

$$(10) \qquad P_1(z)=(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_k),$$

$$(11) \qquad P_2(z)=(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_l),$$

$$(12) \qquad P_3(z)=(z-\gamma_1)\ldots(z-\gamma_m).$$

On a: $n=k+l+m$ et $P(z)=P_1(z)P_2(z)P_3(z)$. Soit A_1 l'ensemble de points $z\epsilon A$ tels que $|z-z_0|\geqq 2\sqrt{\lambda}$. Posons $A_2=\overline{A-A_1}$. On a: $\tau(A_2)\leqq 2\sqrt{\lambda}<[\tau(A)]^2$, donc d'après le lemme 2: $\tau(A_1)\geqq[\tau(A)]^2$. Soit z_1 le point où $P_2(z)$ atteint son maximum sur A_1. On aura:

$$(13) \qquad |P_2(z_1)|\geqq[\tau(A)]^{2l}\geqq[\tau(A)]^{2n}.$$

On a: $|z_1-\alpha_j|\geqq 2\sqrt{\lambda}-\lambda>\sqrt{\lambda}$, $j=1,2,\ldots,k$. Donc:

$$(14) \qquad |P_1(z_1)|>\lambda^{\frac{k}{2}}.$$

Enfin $|z_1-\gamma_j|\geqq|z_0-\gamma_j|\left(1-\left|\frac{z_1-z_0}{z_0-\gamma_j}\right|\right)>\frac{1}{2}|z_0-\gamma_j|$ donc:

$$(15) \qquad |P(z_1)|>[\tau(A)]^{2n}\lambda^{\frac{k}{2}}(\tfrac{1}{2})^m|P_3(z_0)|,$$

$$(16) \qquad |P(z_0)|\leqq\lambda^k 2^l|P_3(z_0)|.$$

D'après la signification de z_0: $|P(z_0)|\geqq|P(z_1)|$, donc:

$$(17) \qquad [\tau(A)]^{2n}\lambda^{\frac{k}{2}}(\tfrac{1}{2})^m<2^l\lambda^k,$$

$$(18)\qquad \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} < \left(\frac{2}{[\tau(A)]^2}\right)^n,$$

$$(19)\qquad k < \frac{2n\log\left(\frac{2}{[\tau(A)]^2}\right)}{\log\frac{1}{\lambda}}.\qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 1. *Si A est en outre un continu on peut remplacer* (9) *par:*

$$(20)\qquad k < \frac{8n}{\log\frac{1}{\lambda}}, \qquad 0<\lambda \leqq \frac{1}{1024}.$$

En effet dans ce cas $\tau(A) \geqq \frac{1}{4}$, donc $\log\frac{2}{[\tau(A)]^2} \leqq \log 32 < 4$ [9]).

Démonstration du théorème I. Nous pouvons supposer que le coefficient de z^n dans $P(z)$ est 1. Pour $\varepsilon>0$ posons:

$$(21)\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$(22)\qquad \lambda = \text{minimum}\left(\frac{1}{1024},\ e^{-\frac{16\log\frac{4}{\sigma}}{\log(1+\varepsilon)}}\right),$$

$$(23)\qquad \eta = \sigma\lambda.$$

Soit $z' \epsilon C$ un point où $P(z)$ atteint son maximum sur C. Soient: $\alpha_1 \ldots \alpha_k, \beta_1 \ldots \beta_{n-k}$ les zéros de $P(z)$ situés respectivement dans les régions: $|z-z'| \leqq \lambda$, et $|z-z'| > \lambda$. Posons:

$$P_1(z) = (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_k) \quad \text{et} \quad P_2(z) = (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_{n-k}).$$

Comme $\eta < \lambda \leqq \frac{1}{1024}$, C contient de points z tels que $|z-z'| \geqq 2\eta$, donc un continu C_1 contenu dans le cercle $|z-z'| \leqq 2\eta$, réunissant z' à la circonférence de ce cercle. Evidement $\delta(C_1) \geqq 2\eta$. Soit $E_1 = C_1 E$. On a $C_1 - E_1 \subset C - E$, donc: $\mu(C_1 - E_1) \leqq \mu(C-E) < \eta$, donc d'après le lemme 1:

$$(24)\qquad \tau(E_1) \geqq \tfrac{1}{4}[\delta(C_1) - \mu(C_1 - E_1)] > \tfrac{1}{4}\eta.$$

---

[9]) une étude directe de ce cas permet d'obtenir $k < \frac{6n}{\log\frac{1}{\lambda}}$.

Donc il existe un $z''\epsilon E_1 \subset E$ tel que:

(25) $$|P_1(z'')| > (\tfrac{1}{4}\eta)^k.$$

D'autre part:

(26) $$|P_1(z')| \leqq \lambda^k,$$

(27) $$\left|\frac{z'-\beta_j}{z''-\beta_j}\right| \leqq \frac{|z'-\beta_j|}{|z'-\beta_j|-|z'-z''|} < \frac{\lambda}{\lambda-2\eta} = \frac{1}{1-2\sigma} < \sqrt{1+\varepsilon}$$

D'après le corollaire 1: $k < \dfrac{8n}{\log\frac{1}{\lambda}}$, donc:

(28) $$\frac{\operatorname*{Max}_{z\epsilon C}|P(z)|}{\operatorname*{Max}_{z\epsilon E}|P(z)|} \leqq \frac{|P(z')|}{|P(z'')|} < \left(\frac{4\lambda}{\eta}\right)^k (1+\varepsilon)^{\frac{n-k}{2}} < \left\{\left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{8}{\log\frac{1}{\lambda}}} \sqrt{1+\varepsilon}\right\}^n \leqq$$
$$\leqq (1+\varepsilon)^n \cdot \text{ c. q. f. d.}$$

Corollaire 2. *Les conditions du théorème I entraînent:*

(29) $$\tau(E) \geqq \frac{\tau(C)}{1+\varepsilon} > \tau(C) - \varepsilon.$$

Corollaire 3 [10]. *Si la suite $\{P_n(z)\}$, où $P_n(z)$ est un polynome de degré n, est bornée sur le continu C à l'exception d'un ensemble de mésure linéaire 0, alors on a pour tout $z\epsilon C$:*

(30) $$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqq 1.$$

Si C est en outre une ligne simple fermée, alors $\sum_{n=1}^{\infty} y^n P_n(z)$ converge pour $|y|<1$ et tout z situé à l'interieur de C ou sur C.

---

[10]) Ce résultat a été démontré par M. Leja (l. c. [3])) pour le cas d'une circonférence.

Remarque de la Rédaction: Voir aussi F. Leja: Math. Ann. 108 (1933), p. 517—524.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS

Par A. Turowicz, Lwów.

§ 1. M. Ważewski a posé la question[1]), quelle est la valeur minima des déterminants du degré n, dont les éléments (réels) a_{ik} satisfont aux inégalités:

$$(1) \qquad |a_{ik}-\delta_{ik}| \leqslant a \leqslant \frac{1}{n} \qquad i,k=1,2,\ldots,n,$$

où $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ik}=0$ pour $i \neq k$; $i,k=1,2,\ldots,n$ et a est un nombre positif fixe. La reponse est donnée par le

***Théorème I.** La valeur minima des déterminants satisfaisants à la condition* (1) *est égale à* $1-na$.

On peut déduire facilement cette proposition d'un théorème de M. Ostrowski[2]).

La démonstration du théorème de M. Ostrowski étant basée sur la considération des séries entières de la variable complexe, nous allons donner une démonstration élémentaire du théorème énoncé.

Démonstration. Il est évident que le minimum en question existe. Nous le désignerons par M.

Le déterminant

$$(2) \qquad D_0 = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad b_{ik}=\delta_{ik}-a \qquad i,k=1,2,\ldots,n$$

satisfait à la condition (1).

---

[1]) Cf. Annales de la Soc. Polon. de Math. T. XVII Fasc. I. p. 130.

[2]) A. Ostrowski: Über die Determinanten überwiegender Hauptdiagonale. Satz I. Comment. Math. Helv. Vol. 10, (1937/38) p. 69.

On vérifie aisément par les additions et les soustractions convenables des lignes et des colonnes que $D_0=1-na$.

On a par conséquent

$$M \leqslant 1-na.$$

Pour démontrer que

$$M \geqslant 1-na$$

remarquons d'abord que la valeur d'un déterminant étant une fonction linéaire de chaque élément, le minimum M est atteint pour

$$|a_{ik}-\delta_{ik}|=a \text{ [3]} \qquad i,k=1,2,\dots,n.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 1-na, \text{ où } a_{ik}=\delta_{ik}+a\varepsilon_{ik},\ |\varepsilon_{ik}|=1,\ i,k=1,2,\dots,n.$$

Nous procédons par induction.

La relation (3) est vraie pour $n=1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour $n=m$ (m entier positif) et soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m+1} \end{vmatrix}$$

où

$$(4) \quad a_{ik}=\delta_{ik}+a\varepsilon_{ik}, \quad a \leqslant \frac{1}{m+1}, \quad |\varepsilon_{ik}|=1, \quad i,k=1,2,\dots,m+1$$

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m+1} \end{vmatrix}$$

Vu que $\frac{1}{m+1}<\frac{1}{m}$ on peut appliquer au déterminant Δ_1 (du degré m) la relation (3) et l'on a:

$$\Delta_1 \geqslant 1-ma \geqslant 1-\frac{m}{m+1}>0.$$

---

[3]) La remarque a été faite par M. Biernacki, cf. Ann. Soc. Pol. Math. loc. cit.

Nous désignerons par Δ_0 le déterminant que l'on obtient du déterminant Δ en remplaçant ε_{11} par -1; on voit que

$$\Delta \geqslant \Delta_0 \tag{5}$$

Nous allons transformer le déterminant Δ_0 en ajoutant pour $k=2,\ldots,m+1$ aux éléments de la k-ième colonne les éléments de la première colonne multipliés par $-\frac{a_{ik}}{1-a}$ (il est $1-a>0$). Ainsi

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+1,1} & c_{m+1,2} & \ldots & c_{m+1,m+1} \end{vmatrix} = \tag{6}$$

$$= (1-a)\cdot \begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m+1,2} & \ldots & c_{m+1,m+1} \end{vmatrix} = (1-a)\Delta_2$$

où

$$c_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}\cdot a_{1k}}{1-a}, \quad i,k=2,\ldots,m+1.$$

Mais pour $i \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ on a $\delta_{i1}=\delta_{1k}=0$, donc $a_{i1}=a\varepsilon_{i1}$, $a_{1k}=a\varepsilon_{1k}$ et nous avons

$$c_{ik} = \delta_{ik} + a\varepsilon_{ik} - \frac{a^2\varepsilon_{i1}\varepsilon_{1k}}{1-a} = \tag{7}$$

$$= \delta_{ik} + \frac{a}{1-a}[(1-a)\varepsilon_{ik} - a\varepsilon_{i1}\varepsilon_{1k}], \quad i,k=2,\ldots m+1$$

donc

$$|c_{ik}-\delta_{ik}| \leqslant \frac{a}{1-a}(1-a+a) = \frac{a}{1-a} \leqslant \frac{1}{m}, \quad i,k=2,\ldots,m+1.$$

On peut donc appliquer l'inégalité (3) au déterminant Δ_2 et en tenant compte de (5) et (6)

$$\Delta \geqslant (1-a)\cdot\left(1-m\frac{a}{1-a}\right) = 1-(m+1)a$$

ce que achève la démonstration.

§ 2. *Théorème II. Pour que la valeur d'un déterminant satisfaisant à la condition* (1) *soit égale à* $1-na$, *il faut et il suffit qu'ils existent les nombres* $\eta_1,\ldots,\eta_n$, $|\eta_i|=1$, $i=1,\ldots,n$ *tels que*

$$a_{ik}=b_{ik}\cdot\eta_i\eta_k \qquad i,k=1,\ldots,n \tag{8}$$

où les b_{ik} *sont définis par* (2).

Démonstration. La suffisance de la condition est évidente.

On démontre la nécessité par induction.

Le théorème est vrai pour $n=1$; supposons qu'il est vrai pour $n=m$ et considérons le cas où $n=m+1$.

Soit Δ un déterminant du degré $m+1$, satisfaisant à la condition (1), pour lequel

$$\Delta=1-na=1-(m+1)a.$$

On va démontrer que les a_{ik} sont de la forme (4) avec $\varepsilon_{ii}=-1$ $i=1,\ldots,m+1$. Les compléments algébriques des éléments de la diagonale principale sont positifs d'après le théorème I, et par conséquent $a_{ii}=1-a$, $i=1,\ldots,m+1$.

En applicant la transformation du § 1 au déterminant Δ, on obtient

$$\Delta=(1-a)\begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{m+1,2} & \ldots & c_{m+1,m+1}\end{vmatrix}=(1-a)\Delta_2$$

où

$$c_{ik}=a_{ik}-\frac{a_{i1}a_{ik}}{1-a}=\delta_{ik}+\left[\frac{a_{ik}-\delta_{ik}}{a}(1-a)-\frac{a_{i1}a_{ik}}{a}\right]\frac{a}{1-a},\qquad i,k=2,\ldots m+1.$$

Puisque

$$\Delta_2=\frac{\Delta}{1-a}=1-m\frac{a}{1-a}$$

et

$$\left|\frac{a_{ik}-\delta_{ik}}{a}(1-a)-\frac{a_{i1}a_{1k}}{a}\right|\leqslant\frac{|a_{ik}-\delta_{ik}|}{a}\cdot(1-a)+\frac{|a_{i1}|}{a}\cdot|a_{1k}|\leqslant 1-a+a=1$$

on voit que Δ_2 a la valeur minima.

Le théorème étant supposé vrai pour $n=m$, ils existent les nombres $\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{m+1}$, $|\vartheta_i|=1$, $i=2,\ldots,m+1$ tels que

$$c_{ik}=\vartheta_i\vartheta_k\left(\delta_{ik}-\frac{a}{1-a}\right)\qquad i,k=2,\ldots m+1 \tag{9}$$

ce que pour $k=i$ donne

$$1+\left[\frac{1-a-1}{a}(1-a)-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a}\right]\frac{a}{1-a}=1-\frac{a}{1-a} \qquad i=2,...m+1$$

donc

$$a^2=a_{i1}a_{1i} \qquad i=2,...,m+1,$$

et puisque

$$|a_{i1}|\leqslant a, |a_{1i}|\leqslant a \qquad \text{pour } i=2,...,m+1$$

nous avons

$$|a_{i1}|=|a_{1i}|=a \qquad i=2,...,m+1.$$

Pour établir que la relation

$$|a_{ik}|=a$$

est vraie pour tous les indices $i\neq k$, $i,k=2,...,m+1$, il suffit de permuter dans le déterminant Δ la première ligne avec la k-ième, ainsi que la première colonne avec la k-ième, avant d'appliquer la transformation précédente.

Nous voyons donc que les a_{ik} sont de la forme (4) avec $\varepsilon_{ii}=-1$, $i=1,...m+1$ et qu'on a pour c_{ik} la formule (7).

En tenant compte de (9) on obtient pour $i=k$

(10) $$\varepsilon_{i1}\varepsilon_{1i}=1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{i1}=\varepsilon_{1i}, \qquad i=2,...,m+1,$$

et pour $i\neq k$,

$$\varepsilon_{ik}+\vartheta_i\vartheta_k=a(\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{i1}\varepsilon_{1k}) \qquad i,k=2,...,m+1.$$

Il est

$$|\varepsilon_{ik}+\vartheta_i\vartheta_k|=0 \quad \text{ou} \quad |\varepsilon_{ik}+\vartheta_i\vartheta_k|=2.$$

Or, la seconde égalité est impossible, parce qu'on aurait

$$|\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{i1}\varepsilon_{ik}|=\frac{1}{a}\cdot|\varepsilon_{ik}+\vartheta_i\vartheta_k|\geqslant(m+1)\cdot 2\geqslant 4,$$

ce qui est absurde. Il est donc

(11) $$\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{i1}\varepsilon_{1k}=0 \qquad i,k=2,...,m+1, \qquad i\neq k$$

Mettons

(12) $$\eta_1=1, \quad \eta_i=\varepsilon_{1i} \quad \text{pour} \quad i=2,...,m+1.$$

En tenant compte de (4), (10), (11) et (12), on vérifie facilement les relations (8) pour le déterminant Δ, ce que achève la démonstration.

SUR UN PROBLÈME DE L'INTERPOLATION

Par F. Leja, Kraków

1. Soit $f(x)$ une fonction continue quelconque définie dans l'intervalle fermé $\langle 0,1 \rangle$.

Faisons correspondre à chaque $n=1,2,\ldots$ un système de $n+1$ nombres $\xi_{0,n}, \xi_{1,n}, \ldots, \xi_{n,n}$ de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ satisfaisant aux inégalités

$$(1) \qquad 0 \leqslant \xi_{0,n} < \xi_{1,n} < \ldots < \xi_{n,n} \leqslant 1$$

et un système de $n+1$ polynômes des dégrés quelconques

$$(2) \qquad P_{0,n}(x), P_{1,n}(x), \ldots, P_{n,n}(x).$$

Les $P_{k,n}(x)$ peuvent désigner, plus généralement, des fonctions continues quelconques définies dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$.

Nous supposerons que la longueur du plus grand des intervalles partiels en lesquels les points (1) divisent l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ tende vers zéro avec $1/n$ et que la fonction $P_{k,n}(x)$ dépende du point $\xi_{k,n}$.

Le problème de l'interpolation consiste dans l'approximation d'une fonction donnée $f(x)$ par les fonctions (polynômes d'interpolation) définies par la formule

$$(3) \qquad \Pi_n(x) = \Pi_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_{k,n}) P_{k,n}(x), \qquad n=1,2,\ldots$$

qui sera dite la formule d'interpolation correspondante aux *points fondamentaux* (1) et aux *polynômes fondamentaux* (2). Les formules d'interpolation de Lagrange et de Borel sont manifestement des cas particuliers de la formule (3).

Je dirai que l'interpolation, définie par (3), est *régulière* si, quel que soit $f(x)$, la suite $\{\Pi_n(x;f)\}$ tend uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$.

On sait, que l'interpolation par la méthode de LAGRANGE n'est pas régulière. Il existe des fonctions très simples pour lesquelles les polynômes d'interpolation de LAGRANGE ne tendent pas vers la fonction interpolée. MM. C. RUNGE [1]) et E. BOREL [2]) ont, les premiers, attiré l'attention sur ce fait surprenant, qui semble être en contradiction avec le théorème de K. WEIERSTRASS sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes. M. BOREL a donné ensuite un exemple d'une interpolation régulière.

2. Posons le problème général suivant: Quelles conditions doivent remplir les polynômes fondamentaux (2) pour que l'interpolation correspondante soit régulière?

Soient α et $\beta>\alpha$ deux nombres quelconques de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Pour simplifier le langage désignons par $P_n(x)$ la somme

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x), \qquad n=1,2,\ldots \tag{4}$$

et par

$$\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} P_{k,n}(x) \tag{5}$$

la somme étendue à tous les indices k (n étant supposé fixe) pour lesquels les points $\xi_{k,n}$ appartiennent à l'intervalle fermé $\langle\alpha,\beta\rangle$. Le symbole (5) aura la signification analogue si l'on y remplace l'intervalle fermé $\langle\alpha,\beta\rangle$ par l'intervalle ouvert de l'un ou des deux cotés: $(\alpha,\beta\rangle$, $\langle\alpha,\beta)$, (α,β).

Cela posé, je vais démontrer, que:

Pour que l'interpolation (3) *soit régulière il suffit que les trois conditions suivantes soient remplies*: 1⁰ *La suite* (4) *tend uniformément vers* 1 *dans l'intervalle* $\langle 0,1\rangle$.

2⁰. *Quels que soit l'intervalle* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *contenu dans* $\langle 0,1\rangle$, *la suite*

$$\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} |P_{k,n}(x)|, \qquad n=1,2,\ldots \tag{6}$$

tend uniformément vers 0 *dans chaque intervalle partiel de* $\langle 0,1\rangle$ *extérieur à* $\langle\alpha,\beta\rangle$.

---

[1]) C. Runge: Z. für Math. u. Phys., t. 46 (1901), p. 224-243.

[2]) E. Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris 1905, p. 74-79.

3⁰ *Il existe un nombre $M>0$ tel que, quel que soit n, on ait dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$*

$$\sum_{k=0}^{n}|P_{k,n}(x)|<M. \tag{7}$$

Démonstration. Supposons que les hypothèses 1⁰, 2⁰ et 3⁰ soient remplies et soit $f(x)$ une fonction continue quelconque définie dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$.

D'après (3) et (4) on a identiquement

$$f(x)-\Pi_n(x)=f(x)[1-P_n(x)]+\sum_{k=0}^{n}[f(x)-f(\xi_{k,n})]P_{k,n}(x),$$

donc, si l'on pose

$$r_{k,n}(x)=[f(x)-f(\xi_{k,n})]P_{k,n}(x), \tag{8}$$

on aura quel que soit x

$$|f(x)-\Pi_n(x)|\leqslant|f(x)|\cdot|1-P_n(x)|+\sum_{k=0}^{n}|r_{k,n}(x)|. \tag{9}$$

Soit x_0 un point quelconque de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et ε un nombre positif quelconque. La fonction $f(x)$ étant uniformément continue dans $\langle 0,1\rangle$ il existe un nombre $\delta>0$ tel qu'on ait

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{4M}, \qquad \text{si } |x_2-x_1|\leqslant\delta. \tag{10}$$

D'autre part, $f(x)$ étant borné dans $\langle 0,1\rangle$, le prémier terme de second membre de (9) tend, d'après l'hypothèse 1⁰, uniformément vers zéro, donc il existe un indice $n_1(\varepsilon)$ tel qu'on ait

$$|f(x)-\Pi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{k=0}^{n}|r_{k,n}(x)| \qquad \text{pour } n>n_1(\varepsilon). \tag{11}$$

Désignons par $\langle\alpha,\beta\rangle$ l'intervalle de centre x_0 et de longueur δ et soit (α',β') un intervalle plus petit de centre x_0 contenu dans $\langle\alpha,\beta\rangle$. Posons

$$\sum_{k=0}^{n}|r_{k,n}(x)|=\sum_{\langle 0,\alpha\rangle}+\sum_{(\alpha,\beta)}+\sum_{\langle\beta,1\rangle}=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$$

et soit $|f(x)|<N$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$. Etant, quel que soit x,

$$|r_{k,n}(x)|<2N|P_{k,n}(x)|,$$

on a

$$(12) \qquad \Sigma_1 < 2N \cdot \sum_{\langle 0,\alpha \rangle} |P_{k,n}(x)| \quad \text{et} \quad \Sigma_3 < 2N \cdot \sum_{\langle \beta,1 \rangle} |P_{k,n}(x)|.$$

L'intervalle (α', β') est extérieur à $\langle 0, \alpha \rangle$ et à $\langle \beta, 1 \rangle$ donc, d'après l'hypothèse 2°, les seconds membres des inégalités (12) tendent uniformément vers zéro dans l'intervalle (α', β'). Par suite, on a dans l'intervalle $\alpha' < x < \beta'$

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad \Sigma_3 < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{pour } n > n_2(\varepsilon).$$

D'autre part, si x appartient à l'intervalle (α', β') et $\xi_{k,n}$ à $\langle \alpha, \beta \rangle$, on a en vertu de (7) et (10)

$$\Sigma_2 = \sum |r_{k,n}(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \sum_{k=0}^{n} |P_{k,n}(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{4},$$

donc si $\alpha' < x < \beta'$ on a

$$(13) \qquad |f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour } n > \max(n_1, n_2).$$

On en voit, que chaque point de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ peut être couvert d'un intervalle plus petit dans lequel l'inégalité (13) a lieu pour tous les n suffisamment grands. Comme l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ est fermé, il existe d'après un théorème de Borel un indice $n(\varepsilon)$ tel, que l'inégalité $|f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon$ a lieu dans l'intervalle entier $\langle 0, 1 \rangle$ pour tous les $n > n(\varepsilon)$. Par conséquent la suite $\{\Pi_n(x)\}$ tend uniformément vers $f(x)$ c. q. f. d.

3. Il s'élève le problème, si les hypothèses 1°, 2° et 3° du théorème précédent sont nécessaires pour la régularité d'une interpolation.

Observons, que si $f(x)$ est égal identiquement à 1, la somme (3) se réduit à $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x)$ et, par suite, l'hypothèse 1° est nécessaire. La question, si les hypothèses 2° et 3° sont, elles aussi, nécessaires reste ouverte.

Nous allons seulement montrer que l'hypothèse 3° n'est pat satisfaite dans le cas de l'interpolation de Lagrange dont les points fondamentaux sont équidistants.

Dans ce cas on a $\xi_{k,n}=k/n$ et (en désignant $\xi_{k,n}$ plus brièvement par ξ_k)

$$P_{k,n}(x)=\frac{(x-\xi_0)\dots(x-\xi_{k-1})(x-\xi_{k+1})\dots(x-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_0)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_n)} \tag{14}$$

pour $k=0,1,\dots,n$.

Il suffit de prouver que, pour certaines valeurs de k et x, le module du polynôme (14) n'est pas borné lorsque n croit indéfiniment.

Soient p et q deux nombres naturels plus petits que n, variant avec n de manière que le centre x de l'intervalle $\left\langle\frac{p}{n},\frac{p+1}{n}\right\rangle$ et le point $x_0=\frac{q}{n}$ restent fixes. On a pour

$$x=\frac{2p+1}{2n}$$

$$P_{q.n}(x)=$$

$$=\frac{\frac{2p+1}{2n}\cdot\frac{2p-1}{2n}\cdots\frac{1}{2n}\cdot\frac{-1}{2n}\cdot\frac{-3}{2n}\cdots\frac{-2(n-p)+1}{2n}}{\frac{q}{n}\cdot\frac{q-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{n}\cdot\frac{-2}{n}\cdots\frac{-(n-q)}{n}}\cdot\frac{1}{\frac{2(p-q)+1}{2n}}$$

d'où

$$|P_{q.n}(x)|=\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2p+1)\cdot1\cdot3\dots[2(n-p)+1]}{q!\,(n-q)!\cdot2^n\cdot(2|p-q|+1)}.$$

Mais

$$1\cdot3\cdot5\dots(2\nu-1)=\frac{(2\nu)!}{\nu!\,2^\nu}$$

donc

$$|P_{q,n}(x)|=\frac{(2p)!\,[2(n-p)]!\cdot(2p+1)}{p!\,2^p\cdot(n-p)!\,2^{n-p}\cdot q!\,(n-q)!\,2^n\cdot(2|p-q|+1)}=$$

$$=\frac{(2p)!\,[2(n-p)]!\,(2p+1)}{p!\,(n-p)!\,q!\,(n-q)!\,2^{2n}(2|p-q|+1)}.$$

En tenant compte de la formule de Stirling

$$n!=n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot e^{\frac{\varepsilon}{12n}},\quad \text{où}\quad 0<\varepsilon<1,$$

on obtient

$$|P_{q,n}(x)|=\frac{p^p(n-p)^{n-p}}{q^q(n-q)^{n-q}}\cdot\frac{2p+1}{\sqrt{q(n-q)}\,(2|p-q|+1)}\cdot\frac{e^{\theta n}}{\pi}$$

où ε_n tend vers zéro avec $1/n$. D'autre part, étant

$$p = n\left(x - \frac{1}{2n}\right), \quad q = nx_0$$

on a

$$(15) \qquad |P_{q,n}(x)| =$$

$$= \left[\frac{\left(x-\frac{1}{2n}\right)^{x-\frac{1}{2n}}\left(1-x+\frac{1}{2n}\right)^{1-x+\frac{1}{2n}}}{x_0^{x_0}(1-x_0)^{1-x_0}}\right]^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{\sqrt{x_0(1-x_0)}} \cdot \frac{e^{\varepsilon_n}}{\lambda(x)\cdot\pi},$$

ou $\lambda(x) = \left|x - x_0 - \frac{1}{2n}\right| + \frac{1}{2n}$.

Faisons varier n, p et q de manière que les points $x = \frac{2p+1}{2n}$ et $x_0 = q/n$ restent fixes et observons que l'expression

$$(16) \qquad \frac{\left(x-\frac{1}{2n}\right)^{x-\frac{1}{2n}}\left(1-x+\frac{1}{2n}\right)^{1-x+\frac{1}{2n}}}{x_0^{x_0}(1-x_0)^{1-x_0}}$$

tend vers

$$\frac{x^x(1-x)^{1-x}}{x_0^{x_0}(1-x_0)^{1-x_0}}$$

lorsque $n\to\infty$. La fonction $y = x^x(1-x)^{1-x}$ décroit dans la prémière moitié de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ de 1 à $^1/_2$ et croit dans la seconde de $^1/_2$ à 1 donc, si $|x-\frac{1}{2}| > |x_0-\frac{1}{2}|$, l'expression (16) surpasse 1 dès que n est suffisamment grand. Par conséquent, le module du polynôme (15) croit indéfiniment au point $x = \frac{2p+1}{2n}$ lorsque n tend vers l'infini pourvu que la distance $|x-\frac{1}{2}|$ soit plus grande que la distance $|x_0-\frac{1}{2}|$.

SUR LA GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE LANCRET CONCERNANT L'UNIFORMISATION DES ÉQUATIONS DE FRENET

Par St. Gołąb, Kraków.

On doit à Lancret la simplification suivante (la formule (3)) des équations de Frenet dans un espace euclidien à trois dimensions. Etant donné dans un R_3 une courbe C non isotrope et en désignant par s l'arc de cette courbe et par t_1, t_2, t_3 respectivement les vecteurs: tangent, normal principal et binormal, associés avec le point mobil de la courbe C, on a les équations de Frenet:

$$\frac{dt_1}{ds} = \varkappa_1 t_2, \quad \frac{dt_2}{ds} = -\varkappa_1 t_1 + \varkappa_2 t_3, \quad \frac{dt_3}{ds} = -\varkappa_2 t_2. \tag{1}$$

Les scalaires $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ s'appellent respectivement la courbure (première) et la coubure seconde (torsion) de la courbe C au point envisagé.

Si l'on introduit avec Lancret le vecteur l [1]) défini au moyen de la formule:

$$l = \varkappa_2 t_1 + \varkappa_1 t_3 \tag{2}$$

et si l'on désigne par le crochet $[v_1, v_2]$ le produit vectoriel des vecteurs v_1, v_2, les équations (1) peuvent être mis sous la forme très simple:

$$\frac{dt_i}{ds} = [l, t_i] \qquad (i=1,2,3). \tag{3}$$

---

[1]) Je cite cette dénomination avec M. R. Rothe, *Differentialgeometrie I*, Berlin 1937, Sammlung Göschen, p. 34.

Il faut remarquer que le vecteur l (appelé aussi le vecteur de Darboux) représente l'axe instantané de rotation du trièdre mobile (t_1, t_2, t_3).

Le but de la note présente est une généralisation des formules (2) et (3) au cas, où notre espace est un espace V_n, c.-à-d. un espace riemannien à n-dimensions pourvu d'un teuseur métrique définissant une forme positivement définie.

Les équations de FRENET prennent dans un espace V_n la forme suivante[2]):

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{ds} = \varkappa_1 t_2 & \\ \dfrac{dt_i}{ds} = -\varkappa_{i-1} t_{i-1} + \varkappa_i t_{i+1} & i=2,\ldots,n-1 \\ \dfrac{dt_n}{ds} = -\varkappa_{n-1} t_{n-1} & \end{cases}$$

ce qui peut être encore écrit sous la forme abrégée:

$$(5) \qquad \frac{dt_i}{ds} = -\varkappa_{i-1} t_{i-1} + \varkappa_i t_{i+1}, \qquad i=1,\ldots,n$$

si l'on pose

$$(6) \qquad \varkappa_0 = \varkappa_n = 0.$$

Nous donnerons aux équations (5) une autre forme. Nous introduirons dans ce but la notation

$$(7) \qquad [v_1, \ldots, v_k] \qquad k=2,\ldots,n$$

pour le k-vecteur simple (einfacher p-Vektor selon la terminologie de M. SCHOUTEN), défini d'une façon univoque, si la suite (ordonnée) de vecteurs (contrevariants)

$$(8) \qquad v_1, \ldots, v_k$$

est donnée[3]). Si $k=n-1$, c'est à dire si un $n-1$-vecteur

$$(9) \qquad [v_1, \ldots, v_{n-1}]$$

est donné et si en outre ce $n-1$-vecteur n'est pas dégénéré, ou ce qui revient au même, si les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ ne sont pas linéairement dépendents, on peut attribuer d'une manière univoque au $n-1$-vecteur (9) un vecteur (contrevariant) v^*, défini par l'intermédiaire du e-tenseur et appélé le produit

---

[2]) Cf. p. ex. Schouten-Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, tome 2, Noordhoff 1938, p. 14.

[3]) Cf. p. ex. Schouten-Struik, l. c.[2]), tome 1, p. 16.

vectoriel des vecteurs $v_1,\dots,v_{n-1}$ [4]). Nous le désignerons par le symbole:

(10) $$v^* = [v_1,\dots,v_{n-1}]^*.$$

De même, si le symbole w représente un k-vecteur simple issu de la suite (8) et si l'on adjoint un vecteur v, alors le symbole $[w,v]$ représentera le $k+1$-vecteur $[v_1,v_2,\dots,v_k,v]$.

Nous construirons un $(n-2)$-vecteur L comme la somme d'un certain nombre de $(n-2)$-vecteurs fondamentaux, définis au moyen des vecteurs:

(11) $$t_1,\dots,t_n$$

Quant' à la suite (11), nous supposons le cas général où tous les vecteurs (11) sont linéairement indépendants.

Nous posons

(12) $$I_{kj} = [t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n] \text{ si } k<j.$$

Le nombre de tous les $n-2$-vecteurs possibles (12) est evidemment $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$. Nous choisirons parmi ces $(n-2)$-vecteurs (12) *lès $(n-1)$ vecteurs bien définis* et construirons la quantité L comme suit:

(13) $$\boxed{L = \sum_{j=1}^{n-1} k_j \cdot I_{j,j+1}} \qquad (k_j = \varkappa_j)$$

Nous affirmons que les équations (5) peuvent être mises sous la forme suivante:

(14) $$\boxed{\frac{dt_i}{ds} = [L,t_i]^*} \qquad i=1,2,\dots,n$$

Démonstration. L'hypothèse (6) nous permet d'écrire (13) sous la forme:

(15) $$L = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot I_{j,j+1}$$

Nous démontrerons tout d'abord la relation suivante:

(16) $$t_i = \varrho[t_{i+1},\dots,t_n,t_1,\dots,t_{i-1}]^* \text{ où } \varrho = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^i & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

[4]) Cf. p. ex. Levi-Civita, *Der absolute Differentialkalkül*, Springer 1928, p. 78.

Pour cela nous envisagerons le long de la courbe C les coordonnées géodésiques.[5]) En tenant compte du fait que chaque vecteur t_i est un vecteur-unité et qu'ils sont perpendiculaires deux à deux, nous aurons:

$$(17) \qquad g^{\lambda\mu}=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda=\mu\\ 0 & \text{si } \lambda\neq\mu\end{cases}; \qquad t^{\nu}_{\lambda}=\begin{cases}1 & \text{si } \nu=\lambda\\ 0 & \text{si } \nu\neq\lambda\end{cases}$$

où t^{ν}_{λ} représente la ν-ième composante du vecteur t_{λ}.

Si nous posons:

$$(18) \qquad v=[t_{i+1},\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_{i-1}]^*,$$

nous obtiendrons d'après la définition du vecteur v^*:

$$(19) \qquad \begin{cases} v^{\nu}=t^{[\nu_{i+1}}_{i+1}\ldots . t^{\nu_{i-1}]}_{i-1}\cdot e_{\nu_{i+1}\ldots\nu_{i-1}\lambda}\cdot g^{\lambda\nu}= \\ =e_{\nu_{i+1}\ldots\nu_{i-1}\nu}\cdot t^{[\nu_{i+1}}_{i+1}\ldots t^{\nu_{i-1}]}_{i-1}=e_{i+1,\ldots,i-1,\nu}\, t^{[i+1}_{i+1}\ldots t^{i-1]}_{i-1}= \\ =e_{i+1,\ldots,i-1,\nu}. \end{cases}$$

On voit donc, que

$$(20) \qquad \begin{cases} v^{\nu}=0 \quad \text{pour} \quad \nu\neq i \\ v^{i}=e_{i+1,\ldots,i-1,i} \end{cases}$$

Il s'en suit de la définition du e-tenseur que l'on a dans notre système des coordonnées ($g=|g_{\lambda\mu}|=1$):

$$(21) \qquad \begin{cases} e_{i+1,\ldots,i-1,i}=1 & \text{si } n \text{ est impaire,} \\ e_{i+1,\ldots\ldots,i}=(-1)^{i} & \text{si } n \text{ est paire.} \end{cases}$$

De (19), (20), (21) et (17) découle immédiatement la formule (16). Calculons maintenant le second membre de l'équation (14). On a

$$(22) \qquad \begin{cases} [L,t_i]^*=[\sum_{j=1}^{n} k_j\cdot I_{j,j+1},t_i]^*=\sum_{j=1}^{n} k_j[I_{j,j+1},t_i]^*= \\ =\sum_{j=1}^{n} k_j[t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+2},\ldots,t_n,t_i]^*= \\ = k_i[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+2},\ldots,t_n,t_i]^*+k_{i-1}[t_1,\ldots,t_{i-2},t_{i+1},\ldots,t_n,t_i]^*= \\ = k_i[t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+2},\ldots,t_n]^*(-1)^{n-i-1}+ \\ + k_{i-1}[t_1,\ldots,t_{i-2},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n]^*(-1)^{n-i}. \end{cases}$$

Deux cas sont maintenant à distinguer suivant que n est paire ou impaire.

---

[5]) Cf. p. ex. Schouten-Struik, l. c., tome 1, p. 100.

Si $n=2m$ on a

$$(23)\quad \begin{cases} [t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+2},\ldots,t_n]^* = [t_{i+2},\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_i]^* \\ [t_1,\ldots,t_{i-2},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n]^* = [t_i,\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_{i-2}]^*. \end{cases}$$

Si $n=2m+1$ les formules correspondantes deviennent un peu plus compliquées:

$$(24)\quad \begin{cases} [t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+2},\ldots,t_n]^* = -[t_n,t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+2},\ldots,t_{n-1}]^* \\ [t_1,\ldots,t_{i-2},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n]^* = -[t_n,t_1,\ldots,t_{i-2},t_i,t_{i+1},\ldots,t_{n-1}]^* \end{cases}$$

et par conséquent:

$$(25)\begin{cases} [t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+2},\ldots,t_n]^* = (-1)^{n-(i+2)+1}[t_{i+2},\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_i]^* \\ [t_1,\ldots,t_{i-2},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n]^* = (-1)^{n-i+1}[t_i,\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_{i-2}]^*. \end{cases}$$

Nous avons donc dans le cas où $n=2m+1$:

$$\begin{aligned} [L,t_i]^* = {} & k_i[t_{i+2},\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_i]^*(-1)^{n-i-1+n-i-1} \\ + {} & k_{i-1}[t_i,\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_{i-2}]^*(-1)^{n-i+n-i+1} \\ = {} & -k_{i-1}[t_i,\ldots,t_{i-2}]^* + k_i[t_{i+2},\ldots,t_i]^*, \end{aligned}$$

donc, d'après (16) on a

$$(26)\qquad [L,t_i]^* = -k_{i-1}t_{i-1} + k_i t_{i+1}.$$

Dans le cas $n=2m$ on parvient à la même formule, car

$$(27)\quad \begin{aligned} [L,t_i]^* &= k_i[t_{i+2},\ldots,t_i]^*(-1)^{n-i-1} + k_{i-1}[t_i,\ldots,t_{i-2}]^*(-1)^{n-i} \\ &= k_i t_{i+1}(-1)^{n-i-1+i+1} + k_{i-1}t_{i-1}(-1)^{n-i+i-1} \\ &= k_i t_{i+1}(-1)^{2m} + k_{i-1}\cdot t_{i-1}(-1)^{2m-1} = -k_{i-1}\cdot t_{i-1} + k_i t_{i+1}. \end{aligned}$$

En tenant compte des équations (5) nous voyons que notre formule (14) est ainsi établie.

SUR UN PROBLÈME DE LA MÉTRIQUE ANGULAIRE DANS LES ESPACES DE FINSLER

Par A. Bielecki et St. Gołąb, Kraków.

Le but de cette note est la démonstration de deux propositions concernant la métrique angulaire des espaces de Finsler[1]). Il existe dans ces espaces plusieurs définitions de la mesure d'un angle qui ne sont pas équivalentes[2]).

La mesure d'un angle proposé par M. Finsler dans sa thèse[3]) ne possède en général aucune des deux propriétés suivantes: 1⁰) l'additivité, 2⁰) l'invariabilité par rapport au changement des côtés de l'angle. Finsler même a résolu[4]) (moyennant certaines hypothèses concernant la regularité de l'indicatrice) le problème pour quels espaces sa mesure angulaire est indépendante de l'ordre des côtés. Le problème de la détermination de tous les espaces de Finsler pour lesquels subsiste la propriété 2⁰), posé et résolu par S. Gołąb, a été ensuite généralisé par A. Bielecki (théorème I) qui a en même temps généralisé le théorème de M. Finsler (théorème II).

Comme les problèmes de la métrique angulaire appartiennent essentielement à la géométrie plane et que l'extension de ces problèmes aux espaces à plusieurs dimensions ne présente pas des difficultés dans notre cas, nous nous bornons au cas d'un espace de Finsler à deux dimensions. A cause du fait que le

---

[1]) P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.* Dissertation Göttingen 1918.

[2]) S. Gołąb: *Einige Bemerkungen über Winkelmetrik in Finslerschen Räumen.* Abhandlungen d. Internat. Mathematikerkongresses in Zürich 1932.

[3]) l. c. [1]), p. 38 et 39.

[4]) l. c. [1]), p. 41.

problème est local il suffit d'envisager un espace plan de MINKOWSKI. Un tel espace est déterminé si l'on donne dans un plan euclidien un ensemble I, appelé indicatrice et un point O dit l'origine de l'indicatrice. L'indicatrice possède la propriété d'avoir avec chaque rayon issu de O un seul et unique point P commun (qui peut être éventuellement rejeté à l'infini).

Pour citer (et en même temps généraliser) la définition de la mesure augulaire au sens de M. FINSLER il faut préciser tout d'abord la notion de la demi-tangente au point donné d'une courbe représentée paramètriquement. Étant donné un ensemble plan C défini par l'intermédiaire des équations paramètriques: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ pour $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$; pour une valeur de $t=t_0$ où $\alpha<t_0<\beta$ nous dirons que C possède au point $P_0[\varphi(t_0),\psi(t_0)]$ une demi-tangente à droite (paramètrique), si les fonctions φ et ψ sont pour $t=t_0$ continues à droite, si pour $h>0$ on a $P(t_0+h)\neq P(t_0)$ et si en outre le rayon $\overrightarrow{P(t_0)\,P(t_0+h)}$ tend vers une position limite quand $h\to 0+0$.

Introduisons dans notre plan de MINKOWSKI un système de coordonnées cartésiennes (x,y) en prenant O comme origine et le système de coordonnées polaires (φ,ϱ) lié au système cartesien par des relations:

(1) $$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi,$$

où φ est la mesure *euclidienne* de l'amplitude.

L'équation de l'indicatrice I peut être alors écrite en coordonnées polaires:

(2) $$\varrho=f(\varphi)\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

où

(3) $$0\leqslant f(\varphi\leqslant+\infty.$$

Définition. Soient r_1 et r_2 deux rayons issus de O. Si $r_1=r_2$, nous posons tout simplement $m(r_1,r_2)=m(r_2,r_1)=0$. Si r_2 est opposé par rapport à r_1, nous poson $m(r_1,r_2)=m(r_2,r_1)=\pi$. Supposons maintenant que $r_1\neq r_2$ et $r_1\neq -r_2$. Supposons en outre que l'indicatrice I possède au point P_1 sur r_1 la demi-tangente paramètrique t_1 (où l'amplitude φ est prise comme

paramètre) dans le sens du rayon r_2. Nous posons avec M. Finsler[4])

$$m(r_1, r_2) = \arc\cos \frac{OP_2}{OQ}, \tag{4}$$

P_2 étant le point de l'indicatrice situé sur r_2, et Q étant le point d'intersection de la demi-droite t_1 avec r_2. Dans le cas où t_1 ne coupe pas le rayon r_2 il faut prendre l'intersection des prolongements des rayons t_1 et r_2 et attribuer à la mesure OQ un signe négatif. Si enfin t_1 est parallel au r_2 nous posons $m(r_1, r_2) = \pi/2$. Nous obtenons dans ce cas un couple de directions transversales.

Remarque. Il suit de la définition précédante que pour certains couples de directions r_1, r_2 la mesure $m(r_1, r_2)$ peut ne pas exister, notamment si I est privée de la demi-tangente au point P_1, ou que Q se confond avec l'origine O.

Remarquons encore que la mesure angulaire définie ci-dessus n'est pas nécessairement réelle. Mais dans le cas d'une indicatrice convexe la mesure (4) résulte réelle pour chaque angle.

Nous affirmons que, si l'indicatrice I est une ellipse ayant O pour centre, la métrique angulaire définie par la formule (4) jouit des deux propriétés énoncées plus haut, c'est-à-dire l'additivité et l'invariabilité par rapport à la permutation des côtés des angles. En effet, le deuxième membre de la formule (4) est un invariant par rapport aux transformations centro-affines de notre plan. En transformant, par conséquent, notre ellipse en cercle nous obtenons la métrique angulaire euclidienne possédant les propriétés bien connues.

Pour simplifier la manière de dire nous fairons encore la convention suivante:

Convention. Trois rayons r_1, r_2, r_3 issus de O seront appelés consécutifs, si r_2 coupe un certain segment dont une extremité se trouve sur r_1, la deuxième étant sur r_2 et les deux extrémités étant différentes de O.

---

[5]) M. Finsler suppose dans sa définition l'existence d'une tangente bilatérale.

Théorème I[6]). Si l'indicatrice I est depourvue des points à l'infini et si elle possède dans chaque point P une demi-tangente bien detérminée (dans un sens fixe de rotation, que nous appelons positif) et si la relation

$$m(r_1,r_2)+m(r_2,r_3)=m(r_1,r_3) \tag{5}$$

est vérifiée pour tous les trois rayons consécutifs r_1,r_2,r_3, dans ce cas l'indicatrice I représente une ellipse ayant O comme centre.

Remarque. Nous démontrerons en réalité un théorème plus général en supposant les hypothèses suivantes:

1) il existe deux rayons r_1,r_2 tels qu'aux points correspondanss P_1 et P_2 l'indicatrice I a les demi-tangentes dans le sens positif,
2) les droites t_1 et t_2 ne passent pas par O,
3) la demi-droite t_1 ne passe pas par P_2,
4) la demi-droite t_1 coupe le rayon r_2 (en un point Q),
5) la relation (5) subsiste pour tous les trois rayons consecutifs r_1,r_2,r_3 pour lesquels les mesures $m(r_1,r_2)$, $m(r_2,r_3)$, $m(r_1,r_3)$ sont définies.

Démonstration. L'indicatrice I ne peut pas se réduire au seul point O, parce que dans ce cas la demi-tangente n'existerait pour aucune valeur de φ; il existe, par conséquent, un point P de l'indicatrice qui est différent de O. Sans restreindre la généralité on peut admettre que ce point P correspond à la valeur $\varphi=0$ de l'amplitude. A cause de l'hypothèse de l'existence de demi-tangente paramètrique, les points de l'indicatrice pour les $\varphi>0$ suffisamment petits sont voisins de P, donc aussi différents de O.

---

[6]) Dans l'énoncé primitif de ce théorème, S. Gołąb a supposé la dérivabilité jusqu'au troisième ordre et a obtenu pour la fonction inconnue $f(\varphi)$ l'équation différentielle du troisiéme ordre:

$$f^2f'''-9ff'f''+12f'^3+4f^2f'=0.$$

Cette équation était transformée au moyen de la substitution $f=F^{-\frac{1}{2}}$ en équation plus simple:

$$F'''+4F'=0$$

qui se laisse facilement intégrer.

On peut démontrer que pour une courbe représentée sous la forme

$$x=f(\varphi)\cos\varphi, \quad y=f(\varphi)\sin\varphi \tag{6}$$

l'existence d'une tangente resp. d'une demi-tangente ne passant pas par O est dans l'hypothèse de $f(\varphi)>0$ équivalent à l'existence de la dérivée resp. de la dérivée unilatérale finie.

Bornons nous à l'entourage à droite du point $\varphi=0$ dans lequel on a $f(\varphi)>0$. La fonction f possédant partout dans cet entourage une dérivée à droite finie ou infinie, possède, d'après un théorème bien connu [7]), une dérivée (finie ou infinie) presque partout. Mais l'ensemble des points, où la dérivée admet la valeur $+\infty$ ou $-\infty$, est de mesure nulle, donc $f(\varphi)$ possède dans le voisinage envisagé presque partout une dérivée finie. D'après la remarque précédente, cela signifie que l'indicatrice I possède presque partout dans le voisinage mentionné une tangente bilatérale ne passant pas par O. Prenons un de ces points, appelons le par P_1 et désignons par r_1 le rayon corréspondant, par t_1 la demi-tangente (à droite) en P_1. Soit r^* le rayon issu de O et parallèle au t_1. Supposons d'abord qu'il existe des points de la demi-droite t_1 n'appartenant pas à I. Il existe alors sur I un point P_2 n'appartenant pas à t_1, différent de O dans lequel la demi-tangente t_2 ne passe pas par O et tel que le rayon r_2 coupe r_1 en un point Q. Examinons maintenant le cas où t_1 fait partie de I. La possibilité que la droite t_1 toute entière appartienne à I est exclue, parce que dans ce cas il n'y aurait pas de demi-tangente au póint correspondant au rayon parallèl à $-t_1$ contrairement à notre hypothèse. Comme la droite t_1 toute entière ne peut pas appartenir à I, il existera un rayon r_0 coupant la droite t_1 et rencontrant l'indicatrice I au point $P_0\neq O$ n'appartenant pas à t_1; on peut en outre réaliser le fait que la demi-tangente à droite t_0 ne passe pas par O. Nous affirmons que t_0 est parallèle à t_1. En effet, en appliquant la formule (5) aux trois rayons consécutifs r_0, r_1 et r coupant t_1, nous parvenons, d'après la formule $m(r_1, r)=0$, à l'égalité: $m(r_0, r)=m(r_0, r_1)=\text{constans}$, pour r variable et cette circonstance n'est possible que dans le cas où t_0 est parallèle à t_1.

---

[7]) Cf. p. ex. Haupt-Aumann: *Differential- und Integralrechnung*, Berlin 1938, t. 2, p. 108.

Dans ce cas le couple des rayons (r_0, r_1) remplit les mêmes hypothèses que le couple (r_1, r_2) et nous avons ainsi démontré, que les hypothèses 1)—5) résultent des hypothèses du théorème I.

Conservons les notations concernant r_1 et r_2 et soit r_2 l'axe des coordonnées polaires. Le plan doit être orienté de telle façon que l'amplitude du rayon r_1 soit negative. De plus, efféctuons une transformation centro-affine pour obtenir

$$f(0)=1 \tag{7}$$

et pour que la demi-tangente t_2 soit perpendiculaire à r_2. Désignons par r le rayon variable en supposant que son amplitude φ soit positive et suffisamment petite afin que r coupe les demi-droites t_1 et t_2. Introduisons ensuite les notations suivantes[8]):

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} Q = \text{point d'intersection de } t_1 \text{ avec } r_2 \\ R = \text{ ,, \quad ,, \quad de } t_1 \text{ avec } r \\ S = \text{ ,, \quad ,, \quad de } t_2 \text{ avec } r \\ \omega_0 = \text{la mesure euclidienne de l'angle } (r_1, t_1) \\ \varphi_0 = \text{ ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } (r_2, r_1) \\ \varrho_0 = f(\varphi_0), \ \varrho = f(\varphi) \\ a_0 = m(r_1, r_2) \\ a = m(r_2, r) \\ \beta = m(r_1, r). \end{array}\right.$$

De la condition d'additivité des mesures angulaires:

$$\beta = a_0 + a$$

nous obtenons $\cos\beta = \cos a_0 \cos a - \sin a_0 \sin a$, d'où

$$(\cos\beta - \cos a_0 \cos a)^2 = (1 - \cos^2 a_0)(1 - \cos^2 a). \tag{9}$$

En exprimant $\cos a_0$, $\cos a$, $\cos\beta$ par $\varrho_0, \varrho, \varphi_0, \omega_0, \varphi$ nou obtenons les formules suivantes:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos a_0 = \dfrac{OP_2}{OQ} = \dfrac{\sin(\varphi_0 + \omega_0)}{\varrho_0 \sin\omega_0} \\ \cos a = \dfrac{\varrho}{OS} = \varrho\cos\varphi \\ \cos\beta = \dfrac{\varrho}{OR} = \dfrac{\varrho\sin(\varphi_0 + \omega_0 - \varphi)}{\varrho_0 \sin\omega_0}. \end{array}\right.$$

[8]) On recommande au lecteur de dessiner la figure en question pour rendre la démonstration plus accessible.

En tenant compte de (10), il résulte de (9) que

$$\varrho^2\left\{\frac{\sin(\varphi_0+\omega_0-\varphi)}{\varrho_0\sin\omega_0}-\frac{\sin(\varphi_0+\omega_0)\cos\varphi}{\varrho_0\sin\omega_0}\right\}^2=$$

$$=\left(1-\frac{\sin^2(\varphi_0+\omega_0)}{\varrho_0^2\sin^2\omega_0}\right)(1-\varrho^2\cos^2\varphi),$$

ou

(11) $$\varrho^2\cos^2(\varphi_0+\omega_0)\sin^2\varphi=(1-\varrho^2\cos^2\varphi)[\varrho_0^2\sin^2\omega_0-\sin^2(\varphi_0+\omega_0)].$$

Remarquons qu'on a

(12) $$\lambda=\varrho_0^2\sin^2\omega_0-\sin^2(\varphi_0+\omega_0)\neq 0$$

à cause de la relation

$$1-\frac{\sin^2(\varphi_0+\omega_0)}{\varrho_0^2\sin^2\omega_0}=1-\frac{OQ^2}{1}$$

dont le deuxième membre est différent de zéro d'après l'hypothèse (3). En introduisant dans l'équation (11) les coordonnées cartèsiennes (1) et en posant

(13) $$\mu=\cos^2(\varphi_0+\omega_0)$$

on parvient à l'équation

(14) $$\lambda x^2+\mu y^2=\lambda.$$

L'équation (14) nous montre que I est une conique (ellipse, hyperbole ou ligne droite) pour $\varphi\geqslant 0$ et soumis à la condition de l'existence de points d'intersection du rayon $r(\varphi)$ avec les demi-droites t_1,t_2.

Nous exclurons les cas de la ligne droite ou de l'hyperbole. La conique (14) représenterait une ligne droite seulement dans le cas où $\mu=0$. Cette égalité impliquerait la relation $\omega_0+\varphi_0=\pi/2$, ce qui signifierait — comme on le voit facilement — que t_1 est perpendiculaire à l'axe de x. Dans ce cas nous aurions $m(r_1,y)=m(r_2,y)=\pi/2$ tandis que $m(r_1,r_2)\neq 0$ ($Q\neq P_2$!) et, par conséquent, l'additivité des mesures angulaires pour les trois rayons consécutifs r_1,r_2,y n'aurait pas lieu, contrairement à notre hypothèse. Supposons pour un moment, que l'équation (14) représente une hyperbole, et appliquons une transformation centro-affine, de facon qu'un morceau

hyperbolique de I corresponde aux valeurs φ d'un intervalle $[\varphi_1, \varphi_2]$, où $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, que la demi-tangente correspondante à $\varphi = 0$ soit perpendiculaire a l'axe polaire, et que $f(0) = 1$. Alors la demi-tangente t_1 faira avec l'axe polaire un angle obtus, le rayon r coupera t_1 et t_2 pour toutes les valeurs $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ et, par conséquent, l'indicatrice I sera représentée par l'équation (14) pour toutes les valeurs $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Nous arrivons ainsi à une contradiction, parce que l'équation (14) ne peut être satisfaite par aucune valeur ϱ pour $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{-\lambda}$.

Il nous reste la dernière possibilité, à savoir, que l'équation (14) répresente une ellipse ayant O pour centre. Il s'agit de démontrer que l'indicatrice toute entière est identique à cette ellipse. Exécutons une transformation centro-affine de façon que l'ellipse se transforme en cercle et admettons, que I se confond avec ce cercle pour toutes les valeurs φ de l'intervalle $[\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}}]$, où $-\frac{\pi}{8} < \overline{\varphi} < 0$, $0 < \overline{\overline{\varphi}} < \frac{\pi}{8}$. Par un raisonnemment analogue au précédent, nous nous assurons que I est un cercle pour toutes les valeurs $0 < \varphi \leqslant \frac{5\pi}{8}$. On peut maintenant „prolonger" ce raisonnemment. En se bornant à une portion du cercle correspondant à l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$, nous pouvons la „prolonger", c.-à-d. montrer que I est un cercle pour $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{9\pi}{8}$. Après 6 „prolongements" successifs nous démontrons enfin que l'indicatrice toute entière se confond avec le cercle. Notre théorème est ainsi démontré.

Théorème II (Généralisation d'un théorème de Finsler)[9])

Si l'indicatrice I ne contient pas des points à l'infini et admet en tout son point une demi-tangente bien détérminée (dans un sens de rotation fixe) et si

$$(15) \qquad m(r_1, r_2) = m(r_2, r_1)$$

---

[9]) M. Finsler démontre un théorème analogue sous les hypothèses baucoup plus restrictives.

pour tous les couples de rayons r_1, r_2 issus de l'origine O, tels que les deux membres de cette égalité aient un sens déterminé par notre définition, dans ce cas l'indicatrice est une ellipse dont le centre coïncide avec O.

Démonstration. En conservant les notations précédentes supposons que le sens de rotation mentioné dans l'énoncé du théorème est négatif. Nous constantons d'abord, de la même façon que précédemment, qu'il existe un intervalle $\overline{\varphi} \leqslant \varphi \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$ dans lequel $\varrho = f(\varphi) > 0$. Dans cet intervalle l'indicatrice I admet presque partout une tangente (bilatérale) ne passant pas par O. On peut donc trouver un rayon r_1 tel qu'au point P_1 d'intersection de r_1 avec I existe une tangente ne passant pas par O. Soit t_1^+ la demi-tangente positive correspondante. Si la demi-tangente t_1^+ était contenue dans I, alors au point d'intersection de I avec le rayon parallel à t_1^+, il n'existerait aucune demi-tangente négative contrairement à l'hypothèse. Lorsque t_1^+ n'est pas entièrement contenue dans I, on peut tracer un second rayon r_2 coupant t_1^+ et I en deux points distincts Q et P_2, tels qu'il existe au point P_2 une tangente (bilatérale) t_2 ne passant pas par O. Un couple r_1, r_2 étant déterminé, nous exécutons une transformation centro-affine, telle que t_2 soit perpendiculaire à r_2 et que $OP_0 = 1$; nous prenons ensuite r_2 pour l'axe polaire et nous conservons les notations précédentes quant' à φ_0, ω_0, ϱ_0, Q, R, S.

Ceci posé, il existe une tangente à I pour presque toutes les valeurs positives de φ suffisamment petites. Soit φ une de ces valeurs, $t^-(\varphi)$ la demi-tangente négative correspondante, τ la mesure euclidienne de l'angle que fait $t^-(\varphi)$ avec le rayon correspondant $r(\varphi)$.

Puisque t^- et r_1 sont situés du même côté du rayon r, il est évident qu'ils se coupent, ou ils sont parallèls, ou bien leurs prolongements ont un point commun. Dans tous les cas la mesure $m(r, r_1)$ est bien déterminée. D'autre part $m(r_1, r)$ existe aussi et ne surpasse pas $\pi/2$. Alors il résulte de l'hypothèse que $m(r, r_1) = m(r_1, r)$ et, par conséquent, t^- et r_1 se coupent en certain point T; les deux autres cas étant impossibles. Nous en concluons que

$$\frac{\varrho}{OR} = \frac{\varrho_0}{OT}.$$

On a de même $m(r,r_2)=m(r_2,r)$, car toutes les deux mesures existent, et par suite:

$$\frac{\varrho}{OS}=\frac{1}{OU},$$

où U est le point d'intersection de t^- et r_2. Enfin de l'égalité $m(r_1,r_2)=m(r_2,r_1)$ il résulte que

$$\frac{1}{OQ}=\frac{\varrho_0}{OW},$$

où W est le point d'intersection de t_2 et r_1.

En introduisant les quantités $\varphi_0, \omega_0, \varphi, \tau$ dans les trois dernières relations on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\varrho \sin(\varphi_0+\omega_0-\varphi)}{\varrho_0 \sin\omega_0} &= \frac{\varrho_0 \sin(\tau+\varphi_0-\varphi)}{\varrho \sin\tau}, \\ \varrho\cos\varphi &= \frac{\sin(\tau-\varphi)}{\varrho\sin\tau}, \\ \frac{\sin(\omega_0+\varphi_0)}{\varrho_0\sin\omega_0} &= \varrho_0\cos\varphi_0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant la quantité τ, nous obtenons d'après un calcul facile, que

$$\varrho^2(\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)=1, \tag{16}$$

où

$$\lambda=-\operatorname{ctg}\varphi_0\cdot\operatorname{ctg}(\varphi_0+\omega_0).$$

L'équation (16) est satisfaite pour presque toutes les valeurs de φ positives et suffisamment petites, c'est à dire que l'on a

$$f(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi}} \tag{17}$$

presque partout dans un intervalle $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi^*$ suffisamment petit. Le premier membre de la dernière égalité étant continu à gauche et le second étant continu, on en déduit immédiatement que l'égalité (17) subsiste dans tout intervalle envisagé. Une portion de I est donc identique avec la conique (16).

Observons que $\varphi_0+\omega_0$ est la mesure euclidienne de l'angle que fait la demi-tangente t_1^+ avec l'axe de x. Supposons que

$\lambda \leqslant 0$. Nous aurions dans ce cas $\operatorname{ctg}(\omega_0+\varphi_0) \leqslant 0$ ($\sin\varphi_0$ étant négatif), c'est à dire $\omega_0+\varphi_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$. Alors chaque rayon $r(\varphi)$ correspondant à une valeur $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ devrait couper les demi-tangentes t_1^+ et t_2^+ et par conséquent, l'identité (16) serait valable dans tout intervalle $(0,\pi/2)$. Dans le cas $\lambda=0$ la demi-droite $x=1$, $y \geqslant 0$ serait contenue dans I et l'indicatrice n'aurait pas une demi-tangente négative pour $\varphi=\pi/2$, contrairement à l'hypothèse. Dans le cas $\lambda<0$ nous aurions aussi une contradiction, parce que l'équation (16) ne pourrait être satisfaite pour $\varphi = \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{-\lambda}$, par aucune valeur de ϱ.

Le coefficient λ est donc positif, et par suite, une portion de l'indicatrice I est une ellipse au centre O. Nous transformons cette ellipse en un cercle, ensuite nous „prolongeons" de proche en proche un arc circulaire contenu dans I de la même façon que dans la démonstration du théorème I, et nous nous assurons que l'indicatrice est un cercle. Notre théorème est ainsi démontré.

SUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DU TYPE PARABOLIQUE DÉTERMINÉES PAR LES CONDITIONS INITIALES

Par Mirosław Krzyżański, Kraków.

1. Le problème que je vais traiter dans le présent travail concerne l'*équation linéaire normale du type parabolique*:

$$(1)\qquad \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_m,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = b(x_1,x_2,\dots,x_m,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \sum_{j=1}^{m} a_j(x_1,x_2,\dots,x_m,y)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1,x_2,\dots,x_m,y)u + \\ + f(x_1,x_2,\dots,x_m,y),$$

la forme $\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\lambda_i\lambda_k$ étant définie positive et $b>0$. On peut l'écrire:

$$F(u)+f=0,$$

en désignant:

$$F(u)=b\frac{\partial u}{\partial y}+\sum_{j=1}^{m} a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu-\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

L'équation (1) intervient dans la théorie de la propagation de la chaleur et des autres phénomènes ayant le caractère de la diffusion. La variable indépendante y est alors une variable du temps et les x_i des variables de l'espace.

Soit $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_m)$ une fonction continue des x_i. On cherche une solution de l'équation (1) satisfaisant à la *condition initiale*:

$$(2)\qquad u(x_1,x_2,\dots,x_m,0)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_m).$$

L'équation de la propagation de la chaleur dans les substances monogènes isotropes:

$$(C) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

(lorsqu'il s'agit des applications dans la physique, on a $m \leqslant 3$) c'est le cas particulier le plus simple de l'équation (1). On l'appelle brièvement: l'*équation de la chaleur*.

La solution de (C), déterminée par les conditions initiales est donnée par la formule classique de POISSON; elle se présente sous la forme de l'intégrale de WEIERSTRASS. Cependant la question de l'unicité de cette solution n'a été complétement résolue que dans les travaux récents[1]). Je vais traiter non seulement l'unicité de la solution du même problème pour l'équation (1) dans la forme générale, mais aussi son existence.

2. Il sera bien utile pour ce qui va suivre d'introduire une classification des fonctions des variables réelles caractérisant la façon de leur croissance à l'infini. Nous dirons que la fonction $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ appartient à la classe E_α $(\alpha>0)$ lorsqu'il existe deux nombres constants et positifs M et K tels que:

$$|\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_m)| \leqslant M \exp\,[K\sum_{i=1}^{m} x_i^2]^{\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{pour } -\infty<x_i<+\infty,\ i\leqslant m.$$

Nous distinguerons aussi des classes particulières $E_\alpha(M,K)$ suivant la grandeur des constantes M et K.

Dans la classification des fonctions intervenant dans ce qui va suivre on les considérera seulement en tant que les fonctions des x_i. Nous allons voir qu'à condition que les coefficients de (1) soient continus et bornés, il ne peut exister dans la classe E_2 plus qu'une solution de notre problème.

---

[1]) E. Holmgren: *Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur*. Arkiv för Matematik, Astron. och Fys. 18 (1924), M. Picone: *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera...* Math. Annalen, t. 10 (1929) 701—712. A. Tychonoff: *Théorème d'unicité pour l'équation de la chaleur*. Recueil Math. Moscou, 42 (1935) 199—215. M. Nicolesco: *Sur l'équation de la chaleur*. Comm. Math. Helv. 10 (1927) 3—17. S. Täcklind: *Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique*. Nova Acta Regiae Soc. Sc. Upsaliensis. Ser. IV Vol. 10 Nr 3 (1936). Thèse du doctorat.

Quant au sujet des paragraphes des travaux cités, concernant la même question d'unicité, M. Picone expose une méthode générale de la démonstration de l'unicité des solutions d'une classe des problèmes aux limites pour l'équation (1) déterminées dans les domaines illimités. L'auteur applique ensuite cette méthode à la démonstration de l'unicité, dans la classe E_1, de la solution de l'équation (C) déterminée par les conditions initiales (2). M. Tychonoff a démontré non seulement que cette unicité subsiste pour l'équation (C) dans la classe E_2, mais de plus qu'elle n'a pas lieu dans une classe $E_{2+\varepsilon}$, ε étant un nombre positif arbitraire[2]). Une classe plus vaste dans laquelle cette unicité subsiste a été indiquée antérieurement par M. Holmgren, qui a démontré qu'une solution $u(x,y)$ de (C) satisfaisant aux conditions: $u(x,0)=0$ et $|u(x,y)|<M\exp[Kx^2\lg|x|]$ pour $0<y\leqslant y_0$ est identiquement nulle. M. Täcklind a résolu définitivement la question (au cas de l'équation (C)) en démontrant le théorème suivant: Soit $h(r)$ une fonction positive, continue, $\bar{h}(r)$ la plus grande minorante non décroissante de $h(r)$. Pour que toute la solution de (C) s'annulant pour $y=0$ et satisfaisant à la condition $|u(x,y)|<M\exp[K|x|\,h(|x|)]$ soit nulle identiquement, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dr}{\bar{h}(r)}$ soit divergente.

3. Nous supposons que les coefficients A_{ik}, a_j et c de l'équation (1) sont bornés et continus tout au moins dans une couche R_0: $0\leqslant y\leqslant h_0$, $-\infty<x_i<+\infty$, plus précisément qu'il existe trois nombres A, a et γ tels que:

$$(3)_1 \qquad |A_{ik}|\leqslant A,\ |a_j|\leqslant a,\ |c|\leqslant\gamma \qquad (i,j,k=1,2,\dots,m).$$

Il en résulte qu'il existe un nombre $\mathfrak{A}$ tel qu'on a:

$$(3)_2 \qquad \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\lambda_i\lambda_k \leqslant \mathfrak{A}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^2$$

partout dans R_0, $\{\lambda_j\}$ étant un système de nombres quelconques, fixes ou variables. Il est utile d'admettre que $\mathfrak{A}$ est le plus petit des nombres tels que $(3)_2$ ait lieu partout dans R_0. Quant au coefficient b on suppose l'existence d'un nombre $\beta>0$ tel que $b\geqslant\beta$ et en outre que b est borné dans chaque domaine limité, de sorte qu'on peut admettre que $b=1$. Nous le ferons dans la suite.

---

[2]) D'après M. Nicolesco l'unicité a lieu encore lorsque $\frac{\partial u}{\partial x}$ appartient à la classe E_2 (l. c.).

Dans les considérations qui vont suivre dans le numéro présent et le n-ro 4, nous ne supposerons rien sur la fonction f outre la continuité.

Passons maintenant à la construction d'une fonction $H(x_1,x_2,...,x_m,y;k)$ des variables indépendantes x_i et y et du paramètre k, dont nous nous servirons ensuite dans les démonstrations de l'unicité et de l'existence de la solution de notre problème.

La fonction H sera de la forme:

$$H(x_1,x_2,...,x_m,y;k)=\exp.\left[\frac{k\sum_{i=1}^{m}x_i^2}{1-\mu y}+\nu y\right],$$

$\mu(k)$ et $\nu(k)$ étant deux coefficients ne dépendant que du paramètre k; nous allons choisir ces coefficients de façon que: $F(H)>0$ pour toutes les valeurs des x_i et y. A cet effet posons:

$$\mu(k)=4k\mathfrak{A}+\lambda^2;\quad \nu(k)=\left(\frac{2A}{\mu\delta}+\frac{a^2}{\lambda^2}\right)mk+\gamma+N,$$

λ, δ et N étant des nombres positifs arbitraires.

On a, puisque $b\equiv 1$:

$$F(H)=\frac{k}{(1-\mu y)^2}\left[\mu\sum_{i=1}^{m}x_i^2-4k\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}x_ix_k\right]+\frac{2k}{1-\mu y}\sum_{j=1}^{m}a_jx_j-$$
$$-\frac{2k}{1-\mu y}\sum_{j=1}^{m}A_{jj}+c+\nu;$$

en égard aux (3) on a l'inégalité:

$$F(H)\geqslant\frac{k}{(1-\mu y)^2}(\mu-4k\mathfrak{A})\sum_{j=1}^{m}x_j^2-\frac{2ka}{1-\mu y}\sum_{j=1}^{m}|x_j|-\frac{2kmA}{1-\mu y}+\nu-\gamma;$$

la substitution des valeurs choisies de μ et ν (sauf les dénominateurs) donne:

$$F(H)\geqslant k\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\lambda|x_j|}{1-\mu y}-\frac{a}{\lambda}\right]^2+2AMK\left(\frac{1}{\mu\delta}-\frac{1}{1-\mu y}\right)+N.$$

Supposons que H ne soit défini que dans une couche R: $0 \leqslant y \leqslant h$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1,2,\ldots,m)$, dont la hauteur $h = \frac{1}{\mu} - \delta$. Alors: $1-\mu y > \mu\delta$, de sorte que:

$$F(H) \geqslant k \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\lambda |x_j|}{1-\mu y} - \frac{a}{\lambda} \right]^2 + N.$$

Ainsi $F(H)$ est supérieur à une forme quadratique positive définie en $\{x_i\}$.

Observons que lorsque $h_0 > \frac{1}{4k\mathfrak{A}}$ (ce que nous admettons dans la suite), la hauteur h de la couche R ne peut dépasser $\frac{1}{4k\mathfrak{A}}$, mais peut en différer peu à volonté, à condition que λ et δ soient suffisamment petits.

4. Nous allons démontrer maintenant l'unicité de la solution du problème dans la classe E_2. Si les fonctions u_1 et u_2 satisfont à l'équation (1) et se réduisent à la même fonction $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ pour $y=0$, leur différence $u=u_1-u_2$ est une solution de l'équation homogène:

$$F(u) = 0, \tag{4}$$

s'annulant pour $y=0$. Il suffit ainsi de démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Si les coefficients A_{ik}, a_j et c satisfont aux conditions $(3)_1$ et sont continus et $b\equiv 1$, la seule solution de l'équation (4) s'annulant pour $y=0$ et appartenant à la classe E_2 est $u\equiv 0$.*

Démonstration. Supposons que la solution u de (4) appartienne à la classe $E_2(M,K)$. Choisissons $k>0$ et soit alors v la fonction définie par l'égalité:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) = v(x_1,x_2,\ldots,x_m,y)\cdot H(x_2,x_2,\ldots,x_m,y;K+k). \tag{5}$$

Lorsqu'on substitue dans (4) cette expression pour u, on obtient une équation linéaire du type parabolique en v:

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} a_j^{(1)} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c^{(1)} v, \tag{6}$$

le coefficient $c^{(1)}$ étant égal précisément à $F(H)$. Comme $F(H)>0$, on peut reprendre le raisonnement exposé par M. Picone dans le travail cité. En effet, si l'on construit un parallélipipède rectangulaire R_n, détaché de la couche R par les plans $x_i=\pm n$, où n est un entier positif, la fonction v ne peut atteindre dans R_n ni un maximum positif, ni un minimum négatif, que sur la partie σ_n de la surface de R_n, située sur les hyperplans $x_i=\pm n$ et $y=0$.

Soit $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)},y^{(0)})$ un point quelconque de R; pour n assez grand, R_n contient P_0 à son intérieur. En vertu de (5) on peut choisir le nombre n_0 de sorte que $|v|<\varepsilon$ pour $n>n_0$ sur la surface σ_n, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. On a donc $|v|<\varepsilon$ partout dans R_n et en particulier en P_0. Il en résulte que: $v(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)},y^{(0)})=0$. Le point P_0 étant un point arbitraire de R, on a: $v(x_1,x_2,...,x_m,y)\equiv 0$ partout dans R et en vertu de (5): $u(x_1,x_2,...,x_m,y)\equiv 0$ partout dans R.

5. La démonstration de l'existence de la solution déterminée par les conditions initiales s'appuie sur le théorème de M. Giraud et M. Gevrey [3]) sur l'existence de la solution du problème aux limites dans un domaine limité. Ceci exige de faire des hypothèses supplémentaires sur les coefficients A_{ik}. Pour fixer les idées, nous supposons qu'ils satisfont à la condition de Lipschitz.

Il s'agit de la détermination de la solution de (1) satisfaisant à la condition (2). Remarquons que u est la somme de la solution U de l'équation (4) satisfaisant à la même condition initiale et de la solution $\bar{u}$ de (1) s'annulant pour $y=0$. Il suffit donc de démontrer successivement l'existence des fonctions U et $\bar{u}$.

Nous aurons besoin d'appliquer un lemme concernant la fonction H.

Lemme. Dans la couche $R_{1,2}$: $0\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{\mu(k_1+k_2)}-\delta$;

---

[3]) M. Gevrey: *Systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique.* C. R. Ac. Sc. Paris 195 (1932) 690—692. G. Giraud: *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique.* C. R. Ac. Sc. Paris 195 (1932) 98—100.

$-\infty < x < +\infty$, δ étant un nombre positif arbitraire et $\mu(k_1+k_2)=4(k_1+k_2)\mathfrak{A}+\lambda^2$, subsiste l'inégalité suivante:

$$(8)\quad H(x_1,x_2,\ldots,x_m,y;k_1+k_2)>H(x_1,x_2,\ldots x_m,y;k_1)\ \exp.\frac{k_2}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i^2$$

à condition que: $\lambda^2 \leqslant 2(k_1+k_2)\mathfrak{A}$.

Démonstration: Un calcul direct montre que:

$$H(x_1,x_2,\ldots x_m,y;\,k_1+k_2)=$$

$$=H(x_1,x_2,\ldots,x_m,y;k_1)\exp.\left[\frac{k_2(1-\lambda^2 y)}{(1-\mu_{1,2}y)(1-\mu_1 y)}\sum_{i=1}^{m}x_i^2+(\nu_{1,2}-\nu_1)y\right],$$

avec: $\mu_1=\mu(k_1)$, $\mu_{1,2}=\mu(k_1+k_2)$, $\nu_{1,2}=\nu(k_1+k_2)$ et $\nu_1=\nu(k_1)$. Or on vérifie sans difficulté que: $\nu_{1,2}\geqslant\nu_1$. Comme d'autre part: $\lambda^2\leqslant 2\mathfrak{A}(k_1+k_2)$, on a dans $R_{1,2}$: $\lambda^2 y<\frac{1}{2}$. Il en résulte aussitôt la justification de (8).

6. Commençons par démontrer l'existence de la solution U de notre problème pour l'équation (4).

Théorème II. *Lorsque les coefficients A_{ik}, a_j et c satisfont à la condition de Lipschitz et aux conditions* $(3)_1$, *lorsqu'en outre la fonction $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ est continue et appartient à la classe E_2, il existe une solution U de l'équation* (4) *satisfaisant à la condition* (2). *Elle est déterminée dans une couche R dont la hauteur h dépend des coefficients de l'équation et de la fonction φ. La fonction U appartient aussi à la classe E_2.*

Démonstration. Supposons que la fonction φ appartienne à la classe $E_2(M,K)$. Construisons le parallélipipède R_p, analogue a R_n (voir le n-ro 4), p étant un entier positif; soit S_p la surface latérale de R située sur les plans $x_l=\pm p$ et σ_p la surface analogue à σ_n. D'après les théorèmes de M. Giraud et M. Gevrey il existe une solution u_p de l'équation (4) déterminée dans R_p et telle que:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &u_p(x_1,x_2,\ldots,x_m,0)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_m)\ \text{et}\\ &u_p(x_1,x_2,\ldots,x_m,y)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_m)\ \text{sur}\ S_p. \end{aligned}$$

Nous définissons d'une manière analogue le parallélipipède $R_q(q>p)$ et la solution u_q de (4) déterminée dans R_q et satisfaisant sur σ_q aux conditions analogues à (9).

Soient v_q, v_p^* et v_q^* les fonction définies par les relations:

$$u_q = v_q \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_m, y; K);$$
$$u_p = v_p^* \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_m, y; K+k); \quad u_q = v_q^* \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_m y; K+k);$$

k étant un nombre positif arbitraire.

La fonction φ appartenant à la classe $E_2(M;K)$, on a: $|v_q| \leqslant M$ sur σ_q; or v_q est une solution de l'équation analogue à (6) et il en résulte que $|v_q| < M$ partout dans R_q et en particulier sur S_p.

Lorsque $h \leqslant \dfrac{1}{4\mathfrak{A}(K+k)+\lambda^2} - \delta$ et $\lambda^2 \leqslant 2\mathfrak{A}(K+k)$, il résulte du lemme du n-ro 5 que:

$$|v_q^*| < M \cdot \exp\left[-\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right] \quad \text{et} \quad |v_p^*| < M \cdot \exp\left[-\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right] \quad \text{sur } S_p.$$

La différence $v_q^* - v_p^*$ est une solution de l'équation homogène analogue à (6) et s'annulant pour $y=0$; on a donc:

$$\text{(10)} \qquad |v_q^* - v_p^*| < 2Me^{-\frac{k}{2}mp^2},$$

partout dans R.

Soit maintenant P_0 un point quelconque de R; considérons un parallélipipède rectangulaire fixe $\varrho \subset R$ de hauteur h, contenant P_0 a son intérieur. D'après (10) on peut déterminer le nombre p_0 de sorte que R_{p_0} contienne ϱ et que l'on ait:

$$|u_q(x_1, x_2, \dots, x_m, y) - u_p(x_1, x_2, \dots, x_m, y)| < \varepsilon$$

pour $q > p > p_0$ partout dans ϱ, ε étant arbitrairement petit.

Ainsi la suite $\{u_p\}$ converge uniformement dans ϱ. Comme P_0 est un point arbitraire de R, cette suite converge partout dans R vers une fonction continue $U(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$.

Nous allons démontrer que c'est la solution cherchée de notre problème. On a évidemment $U = \varphi$ pour $y=0$; il nous reste de démontrer que U est une intégrale de (4). Il suffit évidemment que ceci ait lieu dans ϱ. Or soit u_ϱ la solution de (4) déterminée dans ϱ, égale à φ pour $y=0$ et identique à U sur la surface latérale de ϱ. On a pour p assez grand: $|U - u_p| < \varepsilon$ et $|u_\varrho - u_p| < \varepsilon$ dans ϱ; on en déduit que $u_\varrho \equiv U$.

Comme $U = v \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_m, y; K)$, où $v = \lim_{q \to \infty} v_q$ et $|v_q| \leqslant M$, on a:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \leqslant M \cdot \exp\left[\frac{K \sum_{i=1}^{m} x_i^2}{1 - \mu y} + \nu y\right]$$

de sorte que U appartient à la classe E_2.

7. En passant à l'équation (1), nous avons besoin de faire une hypothèse concernant la croissance de la fonction f. Nous supposons qu'elle appartient aussi à la classe E_2 (en tant que la fonction des x_i). Ceci nous permettra de démontrer l'existence d'une solution de (1) s'annulant pour $y = 0$.

Théorème III. *Les coefficients de l'équation* (1): A_{ik}, a_j *et* c *satisfaisant aux conditions du théorème II et la fonction* f *appartenant à la classe* E_2, *l'équation* (1) *admet une solution s'annulant pour* $y = 0$. *Cette solution appartient à la classe* E_2 *et est déterminée dans une couche* $\bar{R}$ *analogue à la couche* R *du th. II.*

Démonstration. Supposons que f appartienne à la classe $E_2(M_1, K_1)$. Faisons la substitution:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = \bar{v}(x_1, x_2, \dots, x_m, y)\, H(x_1, x_2, \dots, x_m, y, K_1).$$

L'équation (1) se transforme en une équation:

$$(11) \quad \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \bar{c}\bar{v} + f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$$

(puisque $b = 1$), avec $f_1 = f : H(x_1, x_2, \dots, x_m, y, K_1)$.

Nous l'écrivons en abrégé: $F_1(\bar{v}) + f_1 = 0$.

Le coefficient $\bar{c}$ reste positif pour $y < h_1$, h_1 étant un nombre inférieur a h_0 et à $\frac{1}{4K_1\mathfrak{A}}$. D'après la définition de f_1 on a: $|f_1| \leqslant M_1$.

Soit $\bar{u}_p$ la solution de (1) déterminée dans le parallélipipède $\bar{R}_p$ analogue à R_p du n-ro 6 et détaché de la couche $\bar{R}$, qui s'annule sur $\bar{\sigma}_p$ et $\bar{v}_p = \bar{u}_p : H(x_1, x_2, \dots, x_m, y, K_1)$. Ces fonctions existent en vertu des résultats cités de M. Giraud et M. Gevrey.

Posons:

$$z_p^{(1)} = \bar{v}_p - M_1 y, \quad z_p^{(2)} = \bar{v}_p + M_1 y.$$

$z_p^{(i)}(i=1,2)$ sont des solutions des équations:

$$F_1(z_p^{(i)})+[f\pm M_1(1+\bar{c}y)]=0,$$

le signe + correspondant à $i=1$ et le signe — à $i=2$.

Le composant $f_1+M_1(1+\bar{c}y)$ est positif et $f-M_1(1+\bar{c}y)$ est négatif, de sorte que $z_p^{(1)}$ ne peut atteindre dans $\bar{R}_p$ un maximum positif[4]) et $z_p^{(2)}$ n'y peut atteindre un minimum négatif que sur $\bar{\sigma}_p$. Ainsi: $z_p^{(1)}\leqslant 0$ et $z_p^{(2)}\geqslant 0$ dans $\bar{R}_p$.

Il en résulte que $|\bar{v}_p|\leqslant M_1h_1$ dans $\bar{R}_p$.

En déterminant d'une manière analogue $\bar{u}_q$ et $\bar{v}_q(q>p)$ dans $\bar{R}_q$ on démontre que $|\bar{v}_q|\leqslant M_1h_1$ partout dans $\bar{R}_q$ et en particulier sur $\bar{\sigma}_p$. La différence $\bar{v}_q-\bar{v}_p$ est une solution de l'équation homogène: $F_1(\bar{v})=0$ s'annulant pour $y=0$, on a donc: $|\bar{v}_q-\bar{v}_p|\leqslant 2M_1h_1$ dans $\bar{R}_p$. En introduisant encore les fonctions $\bar{v}_p^*$ et $\bar{v}_q^*$ analogues aux v_p^* et v_q^* du n-ro précédent, on démontre que $|\bar{v}_q^*-\bar{v}_p^*|<\varepsilon$ pour p assez grand; on en déduit que la suite $\{\bar{u}_p\}$ converge dans la couche $\bar{R}$ vers une fonction continue $\bar{u}$. Cette fonction $\bar{u}$ est une solution de l'équation (1) s'annulant pour $y=0$. On peut s'en assurer en reprenant le raisonnement de la fin du n-ro 6. Elle appartient aussi à la classe E_2, on a notamment la limitation:

$$|\bar{u}|\leqslant M_1h_1H(x_1,x_2,\dots,x_m,y,K_1).$$

8. Nous avons aperçu que la hauteur de la couche dans laquelle on a déterminé la solution du problème, est inférieure au plus grand des nombres: $\frac{1}{4K\mathfrak{A}}$ et $\frac{1}{4K_1\mathfrak{A}}$. Cette solution peut avoir des singularités, lorsque y atteind cette borne supérieure. Par exemple, la solution de l'équation de la chaleur qui se réduit à $e^{K\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2}$ pour $y=0$ est: $u=(1-4Ky)^{-\frac{m}{2}}\exp\dfrac{K\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2}{1-4Ky}$.

Cependant on peut souvent étendre le domaine de la régularité de la solution cherchée.

Étudions un exemple particulier tout à fait simple. L'équation:

$$A(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{12}$$

[4]) M. Picone: *Maggiorazione degli integrali delle equazione totalemente paraboliche*. Annali di Matem. s. IV t. 7 (1930).

$A(y)$ étant positive pour $y \geqslant 0$, par le changement de la variable indépendante: $\bar{y} = \Theta(y) = \int_0^y A(\eta) d\eta$ se transforme en équation de la chaleur. La solution de l'équation (12) se réduisant à e^{Kx^2} pour $y=0$ est: $u = [1-4K\Theta(y)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \frac{Kx^2}{1-4K\Theta(y)}$. Elle est régulière dans la région illimitée: $0 \leqslant y \leqslant h'$, $-\infty < x < +\infty$, dont la hauteur h' est égale au plus petit des radicaux de l'équation: $1-4k\Theta(y)=0$. En particulier, lorsque l'intégrale $\int_0^\infty A(\eta) d\eta$ est convergente et inférieure a $\frac{1}{4K}$, le domaine de la régularité de la solution cherchée devient le demi-plan $y > 0$. Il en est ainsi par exemple lorsque $A(y) = e^{-y}$.

9. Le domaine de la régularité de la solution cherchée s'étend à l'infini dans le sens des y croissant, lorsque les fonctions f et φ sont de la classe E_1. En effet, si f appartient à la classe $E_1(M_1, K_1)$ et φ à la classe $E_1(M_2, K_2)$, le changement de la fonction inconnue:

$$u = w \cdot \exp K \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad K = \max(K_1, K_2)$$

transforme l'équation (1) en une équation linéaire normale du type parabolique, qui peut s'écrire: $F_2(w) + f_2 = 0$, les coefficients de $F_2(w)$ et la fonction f_2 étant bornés et on est ramené à la recherche d'une intégrale de cette équation se réduisant pour $y=0$ à une fonction bornée. On peut appliquer alors la méthode des approximations successives et ces approximations convergent dans la demi-espace $y \geqslant 0$. C'est une simple extension du procédé appliqué par M. GIRAUD dans la note citée [5]).

10. Les propriétés des extrema d'une solution de l'équation linéaire normale du type parabolique déterminée dans un domaine limité (dont nous nous sommes servis aux n-ros 4 et 7) subsistent encore lorsque cette solution est déterminée

---

[5]) Voir d'ailleurs: W. Feller: *Zur Theorie der Stochastische Prozesse.* Math. Annalen. t. 113 (1936), 113—160.

dans une région illimitée analogue à R, et en particulier dans la demi-espace $y \geqslant 0$; à savoir:

Lorsque dans l'équation (4) *le coefficient* $c \geqslant 0$, *une solution* U *de cette équation, se réduisant pour* $y=0$ *à une fonction bornée* φ, *ne peut atteindre en dehors de la caractéristique* $y=0$ *ni un maximum positif ni un minimum négatif.* En effet, $U = \lim\limits_{\to\infty} u_p$, les u_p étant des solutions de (4) définies au n-ro 6. Si $-m \leqslant \varphi \leqslant M$, on a aussi $-m \leqslant u_p \leqslant M$ dans R_p et par suite: $-m \leqslant U \leqslant M$ dans R.

On démontre d'une manière analogue que *lorsque dans l'équation* (1) *le coefficient* $c \geqslant 0$ *et* $f \geqslant 0$ (*resp.* $f \leqslant 0$), *une solution* u *de* (1) *se réduisant pour* $y=0$ *à une fonction bornée et déterminée dans une région illimitée* R, *ne peut atteindre en dehors de la caractéristique* $y=0$ *un maximum positif (resp. un minimum négatif).*

Lorsque le coefficient c est borné, mais peut devenir négatif et si: $|c| \leqslant \gamma$, $|\varphi| \leqslant M$, $|f| \leqslant M_1$, le changement de l'inconnue: $u = ve^{\gamma y}$ transforme l'équation (1) en une équation du même type avec le coefficient de v positif et on en déduit la limitation: $|u| \leqslant (M + M_1 y) e^{\gamma y}$.

Enfin, lorsque f et φ appartiennent aux classes $E_1(M_1, K_1)$ resp. $E_1(M_2, K_2)$, on a la limitation:

$$|u| \leqslant M \exp \left[K \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \nu y \right],$$

avec

$$\nu = K^2 \mathfrak{A} + Km(A + a) + \gamma, \quad M = \max(M_1, M_2), \quad K = \max(K_1, K_2).$$

On s'en assure en appliquant la transformation du n-ro 9.

COMPTES-RENDUS
DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
ANNÉE 1945

L'impression du présent tome des „Annales" a été commencée en l'année 1939. Dans la période de 1939—1945 les envahisseurs allemands détruisaient méthodiquement l'action scientifique en Pologne. Toutes les Sociétés scientifiques ont été dissolues, leurs publications interdites.

C'est pourquoi le présent tome ne paraît qu'aujourd'hui, en 1945, avec le retard de six années.

Malgré ces obstacles, le travail scientifique de notre Société n'a pas été suspendu. Pendant l'envahissement de notre pays par les Allemands, la plupart des Sections de la Société arrangeait des séances secrètes. Au courant de ces séances, les membres de la Société communiquaient les résultats de leurs travaux. Les comptes-rendus de ces travaux secrets nous manquent encore. Bon nombre de nos confrères qui y participaient sont décédés.

Pour cette raison, nous nous bornons à publier les comptes-rendus des séances (depuis mars 1945) de la Section de Cracovie qui, la première après la guerre, a eu la possibilité de reprendre son activité normale.

BUREAU DE LA SECTION DE CRACOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja
Vice-Président: Prof. Dr Tadeusz Ważewski
Secrétaire: Dr Adam Bielecki
Trésorier: Prof. Dr Stanisław Gołąb
Membres du Bureau: Prof. Jan Leśniak
Prof. Dr Jan Weyssenhoff
Dr Włodzimierz Wrona

COMMISSION DE CONTRÔLE

Prof. Dr Wacław Sierpiński
Dr Jan Mikusiński
Dr Henryk Titz

SÉANCES DE LA SECTION DE CRACOVIE

27. III. 1945. Ważewski T. *Sur un système d'inégalités différentielles.*

Théorème 1. Envisageons le système d'équations différentielles

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1, \ldots, y^n) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

et supposons que pour i fixe $(i=1,\ldots,n)$ f^i soit une fonction croissante au sens large de chacune de variables $y^1,\ldots,y^{i-1},y^{i+1},\ldots,y^n$ séparément. Nous supposons en outre que les f^i soient continues dans un ensemble ouvert Ω. Admettons enfin que la courbe $y_i = \psi^i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ soit continue dans l'intervalle

$$t_0 \leqslant t < \alpha \tag{2}$$

et renfermée dans Ω.

Dans cette hypothèse subsistent les propriétés suivantes dans lesquelles interviennent les quatre nombres dérivés $\underline{D}_+\psi^i(t)$, $\underline{D}_-\psi^i(t)$, $\overline{D}_+\psi^i(t)$, $\overline{D}_-\psi^i(t)$ (inférieurs ou supérieurs, à droite ou à gauche).

I. Si l'intégrale supérieure du système (1) $y^i = \tau^i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ issue du point $y^i = \tau^i(t_0)$ existe dans l'intervalle (2) et que $\psi^i(t_0) \leqslant \tau^i(t_0)$ alors chacun séparément des systèmes d'inégalités

$$\underline{D}_+\psi^i(t) \leqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \quad \text{pour} \quad t_0 < t < \alpha$$
$$\underline{D}_-\psi^i(t) \leqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

implique les inégalités

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t) \quad \text{pour} \quad i=1,\ldots,n;\ t_0 \leqslant t < \alpha.$$

II. Si l'intégrale inférieure $y^i = \eta^i(t)$ du système (1) issue du point $t=t_0$, $y^i = \eta^i(t_0)$ existe dans l'intervalle (2) et que $\psi^i(t_0) \geqslant \eta^i(t_0)$, alors chacun séparément des systèmes d'inégalités

$$\overline{D}_+\psi^i(t) \geqslant f^i(t, \psi^1(t), .., \psi^n(t)) \quad \text{pour} \quad t_0 < t < \alpha,$$
$$\overline{D}_-\psi^i(t) \geqslant f^i(t, \psi^1(t), .., \psi^n(t)) \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

implique les inégalités

$$\psi^i(t) \geqslant \psi^i(t) \quad \text{pour} \quad i=1,..,n;\ t_0 \leqslant t < \alpha.$$

Celles inégalités-ci (ainsi que les inégalités respectives de la partie I du présent théorème) subsistent aussi lorsque $y^i = \psi^i(t)$ est une intégrale du système (1) issue du même point (conséquence évidente du théorème 1).

Ce théorème constitue une généralisation d'un théorème que j'ai déduit de certaines considérations de M. Kamke et que j'ai appliqué à plusieurs reprises (cf. p. c. ces Annales T. XVI. p. 101).

Voici un théorème inverse au précédent en un certain sens:

Théorème 2. Supposons que les fonctions f^i figurant dans (1) soient continues dans Ω ouvert. Supposons ensuite que, pour deux points quelconques de Ω, $A=(t_0,a_1,...,a_n)$ et $B=(t_0,b_1,...,b_n)$ pour lesquels $a_i \leqslant b_i$ $(i=1,...,n)$ ait lieu la propriété suivante:

Si $y^i = \psi^i(t)$ est une intégrale issue du point A alors il existe une intégrale (pas nécessairement supérieure) $y^i = \tau^i(t)$ issue de B, telle que pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on ait

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t) \quad \text{lorsque} \quad t_0 < t < t_0 + \varepsilon.$$

Dans ces hypothèses la fonction f^i $(i=1,...,n)$ est croissante au sens large par rapport à chacune des variables $y^1,...,y^{i-1},y^{i+1},...,y^n$ séparément.

L'hypothèse, que les f^i soient croissantes au sens large relativement à ces variables, est donc essentielle pour la validité du théorème 1.

La substitution $t=-T$ dans le système (1) conduit aux théorèmes relatifs au cas où les f^i sont décroissantes aux sens large par rapport aux mêmes variables.

3. IV. 1945. Sierpiński W. *Sur quelques résultats concernant la congruence des ensembles de points et leur équivalence par décomposition finie.*

1. En 1926 A. Lindenbaum a declaré, sans donner une démonstration, qu'il sait démontrer à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe pour tout nombre cardinal $m \leqslant 2^{\aleph_0}$ un ensemble plan qui est une somme de m ensembles disjoints avec chacun desquels il est congruent. M. Sierpiński donne un exemple effectif d'un tel ensemble. En même temps il donne un exemple d'un ensemble plan indénombrable qui est une somme de deux ensembles disjoints congruents avec lui. Cela résoût un problème posé par M. H. Steinhaus et résolu partiellement et à l'aide de l'axiome du choix par S. Ruziewicz dans Fund. Math. **2**, p. 4.

2. M. A. Tarski a démontré (Fund. Math. **30**, p. 222, Kor. 1. 17) qu'aucun ensemble linéaire n'est une somme de deux ensembles disjoints qui lui sont équivalents par une décomposition finie. M. Sierpiński donne une démonstration directe de cette proposition.

3. M. Sierpiński donne un exemple effectif d'une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles de l'intervalle $(0,1)$ dont aucuns deux ne sont équivalents par décomposition dénombrable et d'une famille formée de $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles de l'intervalle $(0,1)$, dont aucuns deux ne sont équivalents par décomposition finie.

4. M. Sierpiński démontre que toute sphère S dans l'espace à 3 dimensions peut être décomposée en 8 parties disjointes dont 5 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères disjointes de même rayon que la sphère S (A paraître dans Fund. Math. **33**, pp. 229—234.

5. Toute sphère S (dans l'espace à 3 dimensions) contient $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun lui est équivalent par décomposition en 9 parties (Fund. Math. **33**).

6. Sur un paradoxe de M. J. von Neumann (à paraître dans Fund. Math. **34**).

3. IV. 1945. Sierpiński W. *Sur une relation entre deux substitutions linéaires.*

L'auteur démontre les deux théorèmes suivants:

1. $\varphi_1=\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2=\varphi_2(x)=a_2+b_2x$ étant deux substitutions linéaires quelconques, où $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, on a l'identité:

$$\varphi_1\varphi_2^2\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^2\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}=1.$$

2. Il n'existe aucun système de $2q-1\leqslant 11$ nombres entiers $k_1,k_2,\ldots,k_{2q-1}$, non nuls, sauf peut-être k_{2q-1}, tels qu'on ait pour deux substitutions linéaires quelconques $\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2(x)=a_2x+b_2$, où $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, l'identité

$$\varphi_1^{k_{2q-1}}\varphi_2^{k_{2q-2}}\ldots\varphi_2^{k_2}\varphi_1^{k_1}=1.$$

10. IV. 1945. Orlicz W. *Sur les fonctions remplissant la condition généralisée de Lipschitz.*

Désignons par $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ les fonctions définies pour $h\geqslant 0$, non décroissantes, ne s'annulant que pour $h=0$, et tendant vers 0 avec h. Posons $\gamma(h)=\sup\limits_{o<k\leqslant h}\dfrac{k}{\omega(k)}$. L'auteur communique, parmi les autres, les théorèmes suivants:

I. *La relation*

$$\lim_{h\to+0}\frac{\omega_1(h)}{h}\gamma(h)=0 \tag{1}$$

est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction de période l satisfaisant pour tout x aux deux conditions

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega(|h|); \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\,\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}=+\infty.$$

II. *La relation* (1) *est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction de période l satisfaisant pour tout x à la condition* (2) *et pour presque tout x à la condition*

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\ \text{aprox}\,\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}=+\infty. \tag{3}$$

Considérons l'espace linéaire L^{ω} *composé de toutes les fonctions* $f(x)$ *de période* l *vérifiant la condition* $|f(x+h)-f(x)|\leqslant M\omega(|h|)$ *et définissons la norme de l'élément* $f(x)$ *par la formule* $\|f\| = \inf M + \max |f(x)|$. *On a le théorème:*

III. *Si la relation* (1) *est vérifiée, l'ensemble des fonctions vérifiant* (2) *partout et* (3) *presque partout est résiduel dans* L^{ω}.

On peut démontrer les théorèmes I et II en généralisant le mode de construction bien connu de Weierstrass.

En appliquant cette construction aux fonctions $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ speciales on obtient plusieurs exemples effectifs de fonctions jouissant des propriétés singulières mentionnées ci-dessus.

10. IV. 1945. Orlicz W. *Sur l'espace des fonctions bornées.*

Soit M_l l'espace linéaire composé des fonctions mesurables, essentiellement bornées dans $\langle a,b\rangle$ avec la notion de convergence définie comme il suit: la suite $x_1(t), x_2(t), \ldots$ est dite convergente (l) vers $x_0(t)$ si ces fonctions sont également essentiellement bornées est, de plus, convergent asymptotiquement vers $x_0(t)$.

L'auteur communique plusieurs théorèmes concernant les opérations linéaires dans l'espace M_l, à valeurs dans M_l ou dans un espace du type (F). On a p. e. le théorème suivant:

Soit Y un espace du type (F) dont les éléments sont des fonctions mesurables, jouissant des propriétés suivantes: (a) si pour $\varepsilon_i = 0, 1$ arbitrairs les sommes $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i$ convergent asymptotiquement vers une fonction $y_\varepsilon \in Y$, alors la série $\sum_{i=k}^{\infty} y_i$ est convergente dans Y_i; (b) si y_n converge asymptotiquement vers y_0, alors $\lim \|y_n\| \geqslant \|y_0\|$. Soit $U(x)$ une opération additive, définie dans M_l, à valeurs dans Y et telle que si X_n converge (l) vers x_0 alors $U(x_n)$ converge asymptotiquement vers $U(x_0)$. Dans ces hypothèses $U(x)$ est une opération linéaire (c. à d. continue suivant la norme dans Y).

L'auteur communique quelques théorèmes concernant les suites d'opérations linéaires dans M_l à valeurs dans M_l ou dans un espace du type (F) et donne des applications à la théorie des séries orthogonales et des intégrales iterées.

17. IV. 1945. Mikusiński J. *Sur quelques problèmes concernant les équations différentielles linéaires ordinaires.*

L'auteur énonce quelques propriétés des équations différentelles linéaires.

I. Soit

$$x^{(n)} + A(t)x = 0 \qquad (1)$$

une équation différentielle d'ordre pair $n = 2m$, la fonction $A(t)$ étant continue et positive dans un intervalle donné J.

Il est possible de construire, pour tout système de m points

(2) $$x_1, \ldots, x_m$$

de l'intervalle J et pour tout couple de systèmes de m nombres réels

(3) $$\begin{cases} a_1, \ldots, a_m, \\ b_1, \ldots, b_m, \end{cases}$$

une intégrale $x=\varphi(t)$ de l'équation (1), telle que

$$\varphi(x_1) = a_1, \ldots, \ \varphi(x_m) = a_m,$$
$$\varphi'(x_1) = b_1, \ldots, \varphi'(x_m) = b_m.$$

L'intégrale jouissant de ces propriétés est unique pour chaque triple particulier de systèmes (2), (3) [1]).

On peut énoncer des théorèmes analogues, en supposant que $A(t)<0$ dans J et aussi en admettant que n soit impair. Tous ces théorèmes sont susceptibles à des généralisations bien fortes et peuvent être rapportés à des systèmes d'équations.

II. Supposons maintenant que le coefficient $A(t)$ dans l'équation (1) soit continu pour $t \geqslant 0$ et satisfait constamment à l'inégalité $A(t) \geqslant \varepsilon > 0$; n peut être admis pair ou impair >1.

Nous considérons l'ensemble E des intégrales $x=\varphi(t)$ de l'équation (1) telles que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(0)>0$ dans le voisinnage droit du point $t=0$. Faisons correspondre à chaque intégrale $\varphi(t)$ de l'ensemble E un nombre positif l_φ tel que $[0, l_\varphi]$ soit le plus grand intervalle, où $\varphi(t) \geqslant 0$.

La fonction $A(t)$ et l'ordre n étant fixés, l'ensemble des l_φ est borné. De plus, on peut donner une méthode générale qui permet, dans tout cas particulier, d'établir la valeur numérique de la borne supérieure.

Désignons par $\lambda_n (n=2,3,\ldots)$ la borne supérieure des l_φ dans le cas $A(t) \equiv 1$. Pour $2 \leqslant n \leqslant 6$ on trouve les valeurs approchées:

$$\lambda_2 = 3{,}14, \quad \lambda_3 = 4{,}23, \quad \lambda_4 = 8{,}88, \quad \lambda_5 = 9{,}76, \quad \lambda_6 = 15{,}4.$$

24. IV. 1945. Bielecki A. et Gołąb S. *Sur un problème de la métrique angulaire dans les espaces de Finsler* [Ann. Soc. Pol. Math. XVIII (1945), p. 134].

24. IV. 1945. Bielecki A. *Sur une courbe gauche ayant partout le paratingent parallèl à un plan.*

L'auteur présente une méthode effective permettant de construir un arc simple dans l'espace à trois dimensions

(C) $$\begin{cases} x = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

de telle manière que le paratingent en tout point de l'arc C soit parallel au plan (xy).

---

[1]) Dans ce théorème est contenu un théorème énoncé en 1944 par M. Biernacki.

8. V. 1945. **Leja F.** *Sur une suite des polynômes et le problème de Dirichlet.*

Soit F la frontière d'un domaine plan borné D à connexion simple, $f(z)$ une fonction réelle continue définie sur F, λ un paramètre réel et

$$(1) \qquad \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$$

un système de $n+1$ points de F. Lorsque les points (1) varient sur F le produit

$$\prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} |\zeta_j - \zeta_n| \, e^{-\lambda f(\zeta_j) - \lambda f(\zeta_k)}$$

atteint un maximum.

Supposons que ce maximum soit atteint dans les points $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ de la frontière F et que les indices de ces points soient choisis de manière, que parmi les $n+1$ produits

$$\Delta_j = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |\eta_j - \eta_k| \, e^{-\lambda f(\eta_j) - \lambda f(\eta_k)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

Δ_0 soit plus petit au au plus égal à $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Formons le polynôme

$$(2) \qquad \Phi_n(z;\lambda) = \frac{(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_1)\ldots(\eta_0-\eta_n)} \, e^{n\lambda f(\eta_0)}$$

et faisons varier n. On démontre que la suite

$$\frac{1}{n} \log |\Phi_n(z;\lambda)|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

converge en dehors de la frontière F vers une fonction harmonique remarquable $\Phi(z;\lambda)$. Dans le cas $\lambda = 0$, $\Phi(z;\lambda)$ ne dépend pas de $f(z)$ et se réduit à la fonction de Green du domaine infini extérieur à D avec le pôlé à l'infini. Si λ est positif et tend vers zéro, la fonction $\frac{1}{\lambda}\Phi(z;\lambda)$ tend dans le domaine D (au moins dans certaines conditions) vers une fonction limite constituant la résolution du problème de Dirichlet avec les valeurs frontières $f(x)$.

22. V. 1945. **Zahorski Z.** *Une démonstration correcte d'un théorème de M. Pringsheim.*

22. V. 1945. **Zahorski Z.** *Sur la dérivabilité et sur les operations intégro-limites.*

29. V. 1945. **Sierpiński W.** *Sur les fonctions de plusieurs variables* [Fund. Math. 33 (1945), p. 169—173].

29. V. 1945. **Sierpiński W.** *Sur la trisection d'un angle à l'aide d'une ligne, d'un compas et de la parabole $y=x^2$.*

Soit α un angle donné, $0^0<\alpha<180^0$, et supposons donnée une unité de longueur. Soit P le point aux coordonnées $\left(-\frac{\sin\alpha}{8}, \frac{7}{8}\right)$. Construisons le cercle C de centre P passant par l'origine O des coordonnées. On vérifie sans peine que le point $\left(\sin\frac{\alpha}{3}, \sin^2\frac{\alpha}{3}\right)$ est un point d'intersection du cercle C avec la parabole $y=x^2$, d'où il résulte la possibilité de construire un segment de longueur $\sin\frac{\alpha}{3}$ donc aussi l'angle $\frac{\alpha}{3}$.

29. V. 1945. **Ważewski F.** *Sur une méthode approximative de M. Rappaport concernant la trisection d'un angle.*

Au commencement de 1942 M. Rappaport, un avocat de Leopol, m'a communiqué la suivante méthode de trisection d'angle. Elle est à la fois simple et d'une exactitude pratiquement suffisante pour les angles ne surpossant pas 30^0. La voici: Un point A choisi sur une droite la divise en deux demi-droites e et f. À partir de A on trace une demi-droite g renfermant avec f l'angle $\alpha/2$. On choisit sur e un point E et sur g un point G d'une telle façon que $AG=2EA\neq 0$. La demi-droite issue de E et passant par G renferme avec la demi-droite f convenablement prolongée un angle β. La différence $\delta=\beta-\frac{\alpha}{3}>0$ remplit la relation

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{8\cos\frac{\alpha}{12}}{2\cos\frac{\alpha}{6}+\cos\frac{\alpha}{3}}\cdot\sin^3\left(\frac{\alpha}{12}\right).$$

Pour $\alpha=90^0, 60^0, 45^0$ on a respectivement $\delta=22'23'', 6'17'', 2'39''$. Pour $\alpha\leqslant 30^0$ on a $\delta<1'$.

M. J. Mikusiński a observé que le même angle β peut être construit comme il suit. On construit un triangle isocèle ABC ($AB=AC$) dont l'angle de sommet A est égal à $\alpha/2$. On détermine sur le côté BC un point D tel que $DC=2BD$. L'angle de sommet A du triangle ADC est égal à β.

5. V. 1945. **Krygowski Z.** *Les intégrales hyperelliptiques canoniques de seconde espèce et les fonctions theta.*

12. VI. 1945. **Ważewski T.** *Sur quelques inégalités entre les coefficients des polynômes aux racines non négatives. Application à la limitation des modules des déterminants et des matrices aux éléments complexes.*

Théorème 1. Posons

(1) $$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{où} \quad a_0=1,$$

(2) $$\beta_\nu=|a_\nu|:\binom{n}{\nu}=|a_\nu|\cdot\frac{\nu!\,(n-\nu)!}{n!},$$

(3) $$l_\nu=\beta_\nu^2-\beta_{\nu-1}\beta_{\nu+1},\ (\nu=1,\dots,n-1),$$

(4) $$u_\nu=\sqrt[\nu]{\beta_\nu}-\sqrt[\nu+1]{\beta_{\nu+1}},\ (\nu=1,\dots,n-1),$$

(5) $$v_{pqr}=\beta_{p+q}\beta_{p+r}-\beta_p\beta_{p+q+r},\quad (p\geqslant 0,\ q\geqslant 1,\ r\geqslant 1,\ p+q+r\leqslant n),$$

(6) $$w_{p_1,p_2,\dots,p_s}=\beta_{p_1}\beta_{p_2}\dots\beta_{p_s}-\beta_{p_1+p_2+\dots+p_s},$$
$$(p_\alpha>0;\ p_1+\dots+p_s\leqslant n).$$

Dans l'hypothèse que toutes les racines de P sont non négatives ou toutes non positives on a

(7) $$l_\nu\geqslant 0,\quad u_\nu\geqslant 0,\quad v_{pqr}\geqslant 0,\quad w_{p_1,p_2,\dots,p_s}\geqslant 0$$

Dans le cas où P admet une racine multiple on a

(8) $$l_\nu=0,\quad u_\nu=0,\quad v_{pqr}=0,\quad w_{p_1,\dots,p_s}=0.$$

Si $a_n\neq 0$, chacune de ces inégalités séparément représente une condition nécessaire et suffisante pour que P admette une racine n-tuple.

La partie de ce théorème relative à l_ν et v_ν provient de Newton et Mac Laurin, comme me l'a obligeamment communiqué M. Biernacki. La partie relative aux v_{pqr} et $w_{p_1,\dots,p_s}$ qui en découle facilement paraît être nouvelle.

Theorème 2. Désignons par $|a_\nu|$ $(\nu=1,2,\dots,n)$ la somme des carrés des modules de tous les mineurs de degré ν contenus dans la matrice aux éléments complexes

$$g=\begin{Vmatrix} g_{11}, & \dots, & g_{1m} \\ g_{n1}, & \dots, & g_{nm}\end{Vmatrix},\quad (n\leqslant m)$$

et gardons les notations (2), (3), (4), (5) et (6). Ceci étant admis, on aura les inégalités (7).

Dans le cas $m=n$ désignons par Δ le déterminant de degré n aux éléments g_{ij}. On aura $|\Delta|^2=|a_n|$. Des inégalités $u_\nu\geqslant 0$ il résulte que $\sqrt[n]{\beta_n}\leqslant\sqrt[\nu]{\beta_\nu}$ et, parsuite, $|\Delta|\leqslant\left\{|a_\nu|:\binom{n}{\nu}\right\}^{\frac{n}{2\nu}}$. Cette inégalité devient égalité p. e. pour $g_{ij}=k\delta_{ij}$ où $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ pour $i\neq j$. Dans le cas $\nu=1$ on a $|a_1|=\sum_{ij}|g_{ij}|^2$ et la limitation de $|\Delta|$ respective et souvent plus commode que celle de Hadamard.

L'inégalité (6) relative au cas $p_1+\dots+p_s=n$ conduit à l'inégalité

$$|\Delta|\leqslant\sqrt{\beta_{p_1},\beta_{p_2}\dots\beta_{p_s}}.$$

Dans le cas où le rang de g est égal à n chacune des égalités (8) séparément constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation $y_i=\sum_{j/1}^{n}g_{ij}x_i$ $(i=1,\dots,m;\ m=n)$ soit une similitude.

On ramène le Théorème 2 au Théorème 1 en posant (cf. (1))

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=(-1)^n \text{Dét}(\bar{g}'g-Ex)$$

ou $\bar{g}'$ désigne la matrice à la fois conjugnée et transposé de g et E désigne la matrice unitaire. Le déterminant du second membre est polynôme caractéristique du produit des matrices $\bar{g}'$ et g. On démontre facilement que toutes les racines de P sont non négatives et que $|a_\nu|$ $(\nu=1,...,n)$ est égal à la somme des carrés des modules de tous les mineurs de degré ν contenus dans la matrice M.

12. VI. 1945. Mikusiński J. *Sur le tetraédre.*

12. VI. 1945. Mikusiński J. *Sur une trisection et pentasection approchée d'un angle.*

19. VI. 1945. Wrona W. *Sur une généralisation d'un théorème de M. Schur.*

19. VI. 1945. Wrona W. *Sur les conditions necéssaires et suffisantes pour qu'un espace soit einsteinien ou conformeeuclidien.*

Appelons *courbure scalaire d'une m-direction régulière* en un point de l'espace riemannien V_n à n-dimensions la courbure scalaire d'un sous-espace V_m, géodésique en ce point et y tangent à la m-direction en question. Cette notion est une généralisation de la mesure riemanniene de la courbure, qui est la courbure scalaire d'une bi-direction.

M. F. Schur a démontré le théorème bien connu: *Si la mésure riemanniene de la courbure en chaque point de l'espace V_n ne dépend pas du choix spécial de la bi-direction, elle est alors constante dans V_n.*

L'auteur généralise ce théorème comme il suit:

Si la courbure scalaire d'une m-direction de l'espace V_n, où m est un nombre fixe remplissant la condition $1<m<n$, ne dépend pas du choix spécial de cette m-direction, elle est alors constante dans V_n.

Il résulte des hypothèses de ce théorème que, *si $m<n-1$, l'espace V_n est de courbure constante et si $m=n-1$, l'espace V_n est un espace d'Einstein.*

19. VI. 1945. Jaśkowski S. *Sur une définition de nombres réels.*

26. VI. 1945. Mostowski A. *L'axiome du choix pour les ensembles finis* [Fund. Math. **33** (1945), p. 137-168].

3. VII. 1945. Szarski J. *Sur l'approximation des fonctions continues par une suite de fonctions aux dérivées partielles continues du premier ordre.*

Comme on le sait une fonction $f(x_1,...,x_k)$ continue dans un domaine fermé et borné s'y laine approcher uniformément par une suite de polynomes. Si la fonction $f(x_1,...,x_n)$ jouit en plus de quelques propriétés spéciales, il est difficile, en général, de mettre en évidence les propriétés correspon-

dantes de ces polynomes. Ce problème se laine résoudre, cependant, par une autre méthode d'approvimation que je me propose de montrer.

Supposons que la fonction $f(x_1,...,x_k)$ soit continue dans un ensemble ouvert Ω. Soit A un ensemble fermé et borné, contenu dans Ω. Prenons N naturel suffisamment grand pour que chaque cube:

$$|x_i - \mathring{x}_i| \leqslant \frac{1}{n} \quad i=1,...,k; \quad n \geqslant N,$$

(où $\mathring{Q}(\mathring{x}_1,...,\mathring{x}_k)$ est un point quelconque de l'ensemble A), soit contenu dans Ω. Nous définissons pour l'ensemble A, les fonctions:

$$(1) \qquad F_\nu(x_1,...,x_k) \overset{\text{df}}{=} \frac{\int\limits_{x_1-\frac{1}{\nu}}^{x_1+\frac{1}{\nu}} \cdots \int\limits_{x_k-\frac{1}{\nu}}^{x_k+\frac{1}{\nu}} f(\xi_1,...,\xi_k)d_{\xi_1}...d_{\xi_k}}{2^k\left(\frac{1}{\nu}\right)^k} \qquad \nu=N\ N+1,...$$

Il est facile de vérifier que les fonctions F_ν sont de classe C^1 dans l'ensemble A et y tendent uniformément vers la fonction f.

La formule (1) met en évidence certaines propriétés spéciales des fonctions F_ν. Je n'en énumère que trois:

I. Supposons que la fonction f soit de classe C^1 dans Ω. Les fonctions F_ν sont alors de classe C^2 dans A et leurs dérivées partielles du premier ordre y tendent uniformément vers les dérivées respectives de la fonction f.

II. Si la fonction f possède, dans un point $Q \in A$, la différentielle totale, alors les dérivées partielles du premier ordre des fonctions F_ν, prises dans ce point, tendent vers les dérivées respectives de la fonction f.

III. Si la fonction f est monotone par rapport à une de ses variables alors il en est de même des fonctions F_ν.

3. VII. 1945. Szarski J. *Sur un système d'inégalités différentielles.*

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires:

$$(1) \qquad \dot{y}^i = f^i(x,y^1,...,y^n), \qquad i=1,...,n$$

où les fonctions f^i sont continues dans un ensemble ouvert Ω et où la fonction f^i est croissante (au sens plus large) séparément par rapport à chacune des variables: $y^1,...,y^{i-1},y^{i+1},...,y^n$. Désignons par:

$$(2) \qquad y^i = \psi^i(x), \qquad i=1,...,n$$

l'intégrale supérieure du système (1) passant par le point $\mathring{P}(\mathring{x},\mathring{y}^j) \in \Omega$ et supposons qu'elle soit définie dans l'intervalle:

$$(3) \qquad x_0 \leqslant x < a.$$

Supposons ensuite que les fonctions $\varphi^i(x)$, $(i=1,...,n)$, définies dans l'intervalle (3), soient absolument continues au sens plus large généralisée et qu'elles remplissent les inégalités suivantes:

$$(4) \qquad \varphi^i(x_0) \leqslant \psi^i(x_0), \qquad i=1,...,n,$$

$$(5) \qquad \dot{\varphi}^i_Q(x) \leqslant f^i\big(x, \varphi^1(x),...,\varphi^n(x)\big), \qquad i=1,...,n,$$

$\dot{\varphi}^i_Q$ désignant la dérivée approximative et les inégalités (5) subsistant presque partout dans l'intervalle (3).

Ceci étant supposé on a dans l'intervalle (3) les inégalités suivantes:

$$(6) \qquad \varphi^i(x) \leqslant \psi^i(x), \qquad i=1,...,n.$$

3. VII. 1945. Leja F. *Sur un problème de l'interpolation* [Ann. Soc. Pol. Math. XVIII (1945) p. 123—128].

10. VII. 1945. Gołąb S. *Sur un problème de la théorie des permutations.*

Soit Z_{2n} l'ensemble de tous les nombres naturels de 1 à $2n$. Posons

$$(1) \qquad f_n(x) = 2x-1-(2n-1)\,E\left(\frac{x}{n+1}\right)$$

pour x appartenant à Z_{2n}. On établie sans difficulté que la fonction (1) effectue une permutation de la suite $1, 2, ..., 2n$. Decomposons cette permutation en cycles et désignons par

$$(2) \qquad \sigma_n = (n_1, n_2, ..., n_k), \qquad \left\{\begin{matrix} n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k \\ n_1 + u_2 + \ldots + n_k = 2n \end{matrix}\right\},$$

la suite des ordres des cycles particuliers. La suite (2) peut être appellée signature de la permutation (1).

L'auteur anonce un nombre des théorèmes resp. des hypothèses sur la structure des signatures de la suite (1), qui permettent „à peut près" déterminer ces signatures. Quelques-uns de ces théorèmes ont une liaison avec la théorie des nombres.

24. VII. 1945. Mikusiński J. *Sur les inégalités entre les valeurs moyennes.*

Soit $f(x)$ une fonction continue et strictement monotone dans un intervalle I et soit $f^{-1}(x)$ la fonction inverse. Cela posé, la fonction

$$S(x_1,...,x_n) = f^{-1}\left[\frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}\right], \qquad (x_1,...,x_n \in I),$$

sera dite *moyenne par* $f(x)$ des nombres $x_1,...,x_n$.

Si l'on a deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, continues et strictement monotones dans I, *la condition nécessaire et suffisante pour que la moyenne par* $f(x)$ *soit constamment inférieure à celle par* $g(x)$, *est*

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{f(x+h)-f(x-h)} < \frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{g(x+h)-g(x-h)}.$$

Si, de plus, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fois dérivables, *la condition nécessaire et suffisante pour que la moqenne par $f(x)$ soit non supérieure à celle par $g(x)$ est*

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} \leqslant \frac{g''(x)}{g'(x)}$$

(cette inégalité doit être remplie pour chaque $x \in I$, où $f'(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$).

La dernière condition fut énoncée indépendement par M. S. Łojasiewicz (Kraków).

Le problème de comparabilite des moynnes a été considéré par Hardy-Littlewood-Polya dans le livre: Inequalities, Cambridge 1934; les conditions qu'on y trouve, sont un peu plus compliquées de celles ci-dessus.

24. VII. 1945. Leja F. *Sur les suites monotones en moyenne.*

1. Une suite $\{a_n\}$ est dite *décroissante en moyenne* 1° au sens arithmétique si, quels que soient μ et $\nu = 1, 2, \ldots$, on a

(1) $$a_{\mu+\nu} \leqslant \tfrac{1}{2}(a_\mu + a_\nu),$$

2° au sens géométrique, si on a $a_n > 0$ et

$$a_{\mu+\nu} \leqslant \sqrt{a_\mu \cdot a_\nu}$$

3° au sens harmonique, si $a_n > 0$ et

$$a_{\mu+\nu} \leqslant \frac{2}{1/a_\mu + 1/a_\nu}.$$

La croissance en moyenne se définit d'une facon analogue. On démontre que:

Toute suite monotone en moyenne tend vers une limite finie ou infinie.

Observons que ce résultat reste vrai lorsque on remplace, par exemple, la condition (1) par la condition plus générale que voici:

$$a_{\mu+\nu+\lambda} \leqslant \tfrac{1}{3}(a_\mu + a_\nu + a_\lambda), \qquad \text{où } \mu, \nu, \lambda = 1, 2, \ldots$$

ou par

$$a_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_p} \leqslant \frac{1}{p}(a_{\mu_1} + a_{\mu_2} + \ldots + a_{\mu_p}), \qquad \mu_k = 1, 2, \ldots$$

2. Soit $\Phi(x)$ une fonction continue et monotone au sens strict, $\Phi^{-1}(x)$ la fonction inverse et θ un nombre remplissant la condition $0 < \theta < 1$. Les notions précédentes sont des cas particuliers de la notion plus générale suivante:

La suite $\{a_n\}$ est *décroissante en moyenne au sens de la fonction* $\Phi(x)$ avec le *poids* θ si, quels que soient μ et $\nu = 1, 2, \ldots$, on a pour $\mu \geqslant \nu$

(2) $$a_{\mu+\nu} \leqslant \Phi^{-1}[\theta\Phi(a_\mu) + (1-\theta)\Phi(a_\nu)].$$

Toute suite croissante ou décroissante dans ce sens tend aussi vers une limite finie ou infinie.

3. Voici une autre forme de monotonie en moyenne. Une suite $\{a_n\}$ est dite *décroissante en moyenne* (au sens arthmétique) *par rapport à deux termes précédents* si, quel que soit n, on a

(3) $$a_{n+2} \leqslant \tfrac{1}{2}(a_n + a_{n+1}).$$

La croissancë et la décroissance en moyenne par rapport à p termes précédents se définit d'une façon analogue. On démontre, que:

Toute suite monotone en moyenne par rapport à p termes précédents tend vers une limite finie ou infinie.

Le nombre p dans l'énoncé de ce théorème est supposé fixe. Dans la cas contraire le théorème cesse être vrai. Il existe des suites $\{a_n\}$ divergentes remplissant, par exemple, la condition

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

31. VII. 1945. Krzyżański M. *Sur le problème des valeurs initiales pour les équations différentielles du type parabolique* [Ann. Soc. Pol. Math. XVIII (1945) p. 145].

Table des matières

Problèmes

1) Soit $\{P_n(z)\}$ une suite des polynômes $P_n(z)=a_{n0}+a_{n1}z+\ldots+a_{nn}z^n$ et C un continu issu d'un point z_0. J'ai démontré ailleurs (Math. Ann. t. 108, 1933, p. 520) que, si cette suite est uniformément bornée sur C, on peut faire correspondre à chaque $\varepsilon>0$, $\varepsilon<1$, un voisinage V de z_0 tel, que la suite $\{P_n(z)\cdot(1-\varepsilon)^n\}$ soit uniformément bornée dans V.

Peut-on affirmer que ce théorème reste vrai lorsque C désigne un ensemble fermé de points tel, que le diamètre transfini de la partie commune de C et du cercle $|z-z_0|\leqslant\delta$ est positif quel petit que soit $\delta>0$?

Problème de M. F. Leja

2) Peut-on affirmer que les conditions suffisantes de la régularité d'une interpolation (voir ce volume p. 126) sont aussi nécessaires?

Problème de M. F. Leja

